Espacios L^p con $0 < p < 1$

Ricardo Ariel Pastrán Ramírez
Universidad Nacional de Colombia
Universidad Sergio Arboleda

Resumen

Los espacios L^p con $0 < p < 1$ cumplen débilmente la desigualdad triangular. Esto motiva definir una cuasinorma con esta característica. Esta cuasinorma resulta compatible con una métrica en L^p que además es completa, por lo tanto, los espacios L^p son ejemplos de espacios cuasi-Banach.

Palabras Claves: Espacios L^p, Espacios cuasi-Banach, cuasinormas.
Keywords: L^p Spaces, Quasi-Banach Spaces, Quasinorms.

1 Espacios Cuasinormados

Definición 1. *Una **cuasinorma** sobre un espacio vectorial real X no vacío es una aplicación $\mathfrak{N} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que:*

C1 $\mathfrak{N}(x) = 0$, *sii*, $x = 0$,

C2 $\mathfrak{N}(x) > 0$, *si* $x \neq 0$,

C3 $\mathfrak{N}(\alpha x) = |\alpha|\mathfrak{N}(x)$,

C4 *Existe una constante C independiente de x y y tal que*

$$\mathfrak{N}(x + y) \leqslant C(\mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(y)).$$

*La cuasinorma se dice p-subaditiva si $\mathfrak{N}^p(x + y) \leqslant \mathfrak{N}^p(x) + \mathfrak{N}^p(y)$ para todo $x, y \in X$. La mejor de tales constantes C es llamada módulo de concavidad de la cuasinorma. Si $C = 1$, la cuasinorma es llamada una norma. El par $(X, \mathfrak{N})$ es llamado **espacio cuasinormado**.*

En un espacio cuasinormado $(X, \mathfrak{N})$, con cuasinorma p-subaditiva, se cumple lo siguiente:

i) $\mathfrak{N}(x) = \mathfrak{N}(-x)$ para todo $x \in X$ porque $\mathfrak{N}(-x) = |-1|\,\mathfrak{N}(x)$.

ii) $\mathfrak{N}(x-z) = \mathfrak{N}(z-x)$ para todo $x, z \in X$ porque $\mathfrak{N}(x-z) = \mathfrak{N}((-1)(z-x))$.

iii) Para cualesquiera $x, z \in X$, $|\mathfrak{N}^p(x) - \mathfrak{N}^p(z)| \leqslant \mathfrak{N}^p(x-z)$. Observemos que $\mathfrak{N}^p(x) = \mathfrak{N}^p(x-z+z)$. Como la cuasinorma es p-subaditiva se tiene que

$$\mathfrak{N}^p(x) \leqslant \mathfrak{N}^p(x-z) + \mathfrak{N}^p(z),$$

es decir,

$$\mathfrak{N}^p(x) - \mathfrak{N}^p(z) \leqslant \mathfrak{N}^p(x-z),$$

e intercambiando el papel de x por el de z se obtiene

$$\mathfrak{N}^p(z) - \mathfrak{N}^p(x) \leqslant \mathfrak{N}^p(z-x),$$

multiplicando por (-1) ambos lados de la última desigualdad y utilizando **ii)**,

$$-\mathfrak{N}^p(x-z) \leqslant \mathfrak{N}^p(x) - \mathfrak{N}^p(z) \leqslant \mathfrak{N}^p(x-z),$$

$$|\mathfrak{N}^p(x) - \mathfrak{N}^p(z)| \leqslant \mathfrak{N}^p(x-z).$$

Teorema 1. *Sea $(X, \mathfrak{N})$ un espacio vectorial cuasinormado con $\mathfrak{N}$ una cuasinorma p-subaditiva. Si se define $d(x,y) = \mathfrak{N}^p(y-x)$ entonces d es una métrica para X.*

Demostración. Para ver esto basta probar la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x,z) = \mathfrak{N}^p(z-x) &= \mathfrak{N}^p((y-x)+(z-y)) \\ &\leqslant \mathfrak{N}^p(y-x) + \mathfrak{N}^p(z-y) = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Se dirá que la métrica d es inducida por la cuasinorma p-subaditiva $\mathfrak{N}$.

Cada espacio cuasinormado, con cuasinorma p-subaditiva, es un espacio métrico. De **iii)** arriba y el anterior teorema se concluye que una cuasinorma p-subaditiva elevada a la p es continua, aún más uniformemente continua.

Teorema 2. *Toda cuasinorma p-subaditiva es continua.*

Demostración. Como la composición de funciones continuas entre espacios métricos es continua y la función real $h(y) = y^{1/p}$ es continua, entonces, $\mathfrak{N}(x) = (\mathfrak{N}^p(x))^{1/p} = h(\mathfrak{N}^p(x))$ es continua porque $\mathfrak{N}^p$ es continua.

Definición 2. *Un espacio vectorial cuasinormado se llama un espacio* ***cuasi-Banach*** *si él es completo con su cuasinorma. Si la cuasinorma es p-subaditiva, se dirá, además, que la métrica inducida por la cuasinorma es completa. Ver [4].*

Algunos de los teoremas que se tienen para los espacios vectoriales normados también son ciertos para los espacios vectoriales cuasinormados.

Teorema 3. *Todo subespacio Y de dimensión finita, de un espacio cuasinormado X con cuasinorma $\|\cdot\|$, es completo. Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio cuasinormado X es cerrado en X.*

Demostración. Ver [6].

Teorema 4. *Sean X, Y espacios vectoriales cuasinormados, X con cuasinorma $\|\cdot\|_p$, p-subaditiva, y Y con cuasinorma $\|\cdot\|_r$, r-subaditiva. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Las siguientes afirmaciones acerca de T son equivalentes:*

i) *T es continua.*

ii) *T es continua en $x = 0$.*

iii) *$T(B_1^X(0))$ es acotada.*

iv) *T envía conjuntos acotados en conjuntos acotados.*

v) *Existe $k > 0$ tal que $\|Tx\|_r \leqslant k\|x\|_p$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Ver [6].

Definición 3. *Sean X, Y espacios cuasinormados, X con cuasinorma $\|\cdot\|_p$, p-subaditiva, y Y con cuasinorma $\|\cdot\|_r$, r-subaditiva. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que el operador T es **acotado** si existe un número real k tal que para todo $x \in X$,*

$$\|T(x)\|_r \leqslant k\|x\|_p.$$

El anterior teorema muestra entonces que todo operador continuo es acotado y todo operador acotado es continuo.
Si T es un operador acotado como en la anterior definición y consideramos $x \neq 0$ en X, se tiene que

$$\frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \leqslant k.$$

Si S y T son operadores acotados como en la anterior definición, tal que existe un número real l para el cual $\|S(x)\|_r \leqslant l\,\|x\|_p$, y la cuasinorma en Y posee módulo de concavidad C, se tiene que, el operador $S + T$ es acotado puesto que

$$\begin{aligned}\|(T+S)(x)\|_r &= \|Tx + Sx\|_r \leqslant C(\|Tx\|_r + \|Sx\|_r)\\ &\leqslant C(k\,\|x\|_p + l\,\|x\|_p) = C(k+l)\,\|x\|_p\end{aligned}$$

y el operador αT, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, también es acotado ya que

$$\|(\alpha T)(x)\|_r = \|\alpha T x\|_r \leqslant |\alpha|\, k\, \|x\|_p,$$

por lo tanto, el conjunto de todos los operadores lineales acotados de X en Y es un espacio vectorial y se notará por $\mathfrak{L}(X, Y)$.

Teorema 5. *Sean X, Y espacios cuasinormados, X con cuasinorma $\|\cdot\|_p$, p-subaditiva, y Y con cuasinorma $\|\cdot\|_r$, r-subaditiva, con módulo de concavidad C. La aplicación $\|\cdot\| : \mathfrak{L}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\|T\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\}$$

para todo $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$ es una cuasinorma en $\mathfrak{L}(X, Y)$.

Demostración. **C1** Si $\|T\| = 0$ entonces $\|Tx\|_r = 0$ para todo $x \in X$. Como $\|\cdot\|_r$ es una cuasinorma se concluye que $Tx = 0$ para todo $x \in X$, es decir, $T = 0$. Si $T = 0$, $\|0\| = 0$.

C2 $\|T\| \geq 0$ por que $\|Tx\|_r \geq 0$ y $\|x\|_p > 0$.

C3 Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera. Se cumple por que

$$\begin{aligned} \|\alpha T\| &= \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|(\alpha T)x\|_r}{\|x\|_p} \right\} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ |\alpha| \frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} \\ &= |\alpha| \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} = |\alpha|\ \|T\|. \end{aligned}$$

C4 Sean S y T operadores cualesquiera en $\mathfrak{L}(X, Y)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|S + T\| &= \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|(S+T)x\|_r}{\|x\|_p} \right\} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Sx + Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} \\ &\leqslant \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ C\ \frac{\|Sx\|_r + \|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} \\ &= C\left(\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Sx\|_r}{\|x\|_p} + \frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} \right) \\ &\leqslant C\left(\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Tx\|_r}{\|x\|_p} \right\} + \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|Sx\|_r}{\|x\|_p} \right\} \right) \\ &= C(\|S\| + \|T\|). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\cdot\|$ es una cuasinorma en $\mathfrak{L}(X, Y)$.

Si $T \in \mathfrak{L}(X, Y)$, entonces, se tiene la siguiente desigualdad,

$$\|Tx\|_r \leqslant \|T\| \, \|x\|_p.$$

Si $X = Y$, en lugar de notar el conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en él mismo por $\mathfrak{L}(X, X)$, simplemente se notará $\mathfrak{L}(X)$. Cada miembro de $\mathfrak{L}(X)$ es llamado **endomorfismo**.

2 Espacios L^p para $0 < p < 1$

Lema 1. *Para cualesquiera $a, b > 0$ y $0 < p < 1$ se tiene que:*

$$a^p + b^p \leqslant 2^{1-p}(a+b)^p \qquad y \qquad (a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

Demostración. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$$

con $0 < p < 1$. Luego,

$$f'(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2},$$

así que, $f'(x) = 0$, si y sólo si, $p(1+x)^{p-1}(1-x^{p-1}) = 0$ que ocurre cuando $x = 1$.

$$f''(1) = -p(p-1)2^{p-3} > 0$$

ya que $0 < p < 1$ y $f(0) = 1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Entonces, f alcanza su mínimo valor para $x \geq 0$ en su único punto crítico, $x = 1$, en el cual, $f(1) = 2^{p-1}$. Por lo tanto, $2^{p-1} \leqslant \frac{(1+x)^p}{1+x^p} \leqslant 1$. Tomando $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant x = \frac{b}{a}$ se tiene que:

$$\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p\right) \leqslant 2^{1-p}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)\right)^p \leqslant 2^{1-p}\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^p\right),$$

es decir,

$$a^p + b^p \leqslant 2^{1-p}(a+b)^p \qquad \text{y} \qquad (a+b)^p \leqslant a^p + b^p.$$

Sea $(X, \mathbb{X}, \mu)$ un espacio de medida en el cual X es cualquier conjunto, $\mathbb{X}$ es una σ-álgebra en X y μ una medida definida sobre $\mathbb{X}$.

Definición 4 (Espacios L_p). *Sea $0 < p < 1$ cualquiera. El espacio $L_p = L_p(X, \mathbb{X}, \mu)$ es la colección de todas las funciones f a valor real, definidas sobre X, μ-medibles, para las cuales $|f|^p$ tiene integral finita.*

Estos espacios L_p, con $0 < p < 1$, son espacios vectoriales. Ahora, el empeño es dotar al espacio L_p con una cuasinorma. Para lograr esto, se define la función $\|\cdot\|_p : L_p \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

para cualquier $f \in L_p$. Sin embargo, $(L_p, \|\cdot\|_p)$ no es un espacio cuasinormado porque falla la condición **[C1]**. Para tener esta propiedad se recurre a la relación entre funciones medibles $\sim$ ($f \sim g$ sii $f = g$ en μ-casi toda parte) que es de equivalencia. Entonces, se obtiene una partición del espacio L_p en clases de equivalencia. Cada una de estas clases de equivalencia va a ser denotada por $[f]$, donde $f \in L_p$. Cada $g \in L_p$ que esté en $[f]$ cumple que $f = g$ en μ-casi toda parte.

Definición 5 (Espacios L^p). *Sea $0 < p < 1$ cualquiera. El espacio $L^p = L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$ es la colección de todas las clases de equivalencia $[f]$ que se obtienen por la relación $\sim$ definida en L_p.*

Debemos tener en cuenta que en estos espacios L^p no se trabaja con funciones sino con clases de equivalencia, por lo cual, las operaciones vectoriales se realizan entre clases. La suma de la clase de equivalencia de f y la clase de g para cualesquiera $f, g \in L_p$ se define como la clase de equivalencia de la función $f + g$. Así mismo, el producto de una constante α por la clase de equivalencia de f se define como la clase de equivalencia de la función αf. Como las operaciones vectoriales del espacio L^p están definidas dependiendo de las operaciones vectoriales del espacio vectorial L_p entonces todas las propiedades de los espacios vectoriales son heredadas al espacio L^p, por lo cual, es claro que el espacio L^p es también un espacio vectorial.

Teorema 6. *Los espacios vectoriales $L^p (0 < p < 1)$ son cuasinormados gracias a la función $\|\cdot\|_p$ que es p-subaditiva.*

Demostración. **C1** Si $\|f\|_p = 0$, entonces, $f = 0$ en μ-casi toda parte, es decir, $[f] = [0]$. $\|0\|_p = 0$.

C2 $\|f\|_p \geq 0$ para todo $f \in L^p$ ya que $|f|^p \geq 0$.

C3 Para toda $f \in L^p$ y todo real α se cumple que

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$
$$= |\alpha| \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\alpha| \, \|f\|_p.$$

C4 Por la desigualdad triangular se tiene que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$ y como $0 < p < 1$ por el lema 1. $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ para $a, b \geq 0$. Entonces: $|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant |f|^p + |g|^p$, lo cual implica que

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leqslant \int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu < \infty,$$

y como $0 < p < 1$ del lema 1. $a^p + b^p \leqslant 2^{1-p}(a+b)^p$ para $a, b \geq 0$. Reemplazando

$$a = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{y} \quad b = \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

obtenemos que:

$$\int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu \leqslant 2^{1-p}\left(\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}\right)^p,$$

luego, por la transitividad de la relación $\leqslant$

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leqslant 2^{1-p}\left(\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}\right)^p,$$

por lo tanto,

$$\left(\int_X |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant 2^{(1-p)/p}\left(\left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}\right),$$

es decir,

$$\|f+g\|_p \leqslant 2^{(1-p)/p}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Finalmente, como

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu \leqslant \int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu,$$

entonces,

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

lo cual prueba que la cuasinorma $\|\cdot\|_p$ es p-subaditiva.

Los espacios $L^p(0 < p < 1)$ son métricos gracias a la métrica inducida por la cuasinorma p-subaditiva, $\|\cdot\|_p$.

2.1 Los L^p son cuasi-Banach

Teorema 7. *Los espacios $L^p (0 < p < 1)$ son espacios cuasi-Banach.*

Demostración. Para establecer la completez de estos L^p, sea (f_n) una sucesión de Cauchy relativa a la cuasinorma $\| \cdot \|_p$. Por tanto, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $M(\epsilon) > 0$ tal que si $m, n \geq M(\epsilon)$ entonces

$$\delta_p(f_m, f_n) = \int_X |f_m - f_n|^p \, d\mu = \|f_m - f_n\|_p^p < \epsilon^p.$$

Existe una subsucesión (g_k) de (f_n) tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p^p < 2^{-k}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Definamos g por

$$g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)|,$$

así que g es medible y no negativa. Por lema de Fatou, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p \, d\mu &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|\right)^p d\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \| \, |g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \, \|_p^p. \end{aligned}$$

Utilizando que la cuasinorma $\| \cdot \|_p$ es p-subaditiva se obtiene

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p \, d\mu &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|g_1\|_p^p + \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p^p \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|g_1\|_p^p + \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|g_{k+1} - g_k\|_p^p \\ &\leqslant \|g_1\|_p^p + \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \\ &\leqslant \|g_1\|_p^p + 1. \end{aligned}$$

Por tanto, si $E = \{x \in X : g(x) < +\infty\}$, entonces $E \in X$ y $\mu(X \setminus E) = 0$. Luego, la serie descrita por $g(x)$ converge en casi toda parte y $g\chi_E$ pertenece a L_p.

Definamos ahora f sobre X por:

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{g_{k+1}(x) - g_k(x)\}, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Como $|g_k| \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leqslant g$ y la sucesión (g_k) converge en casi toda parte a f, el teorema de la Convergencia Dominada implica que $f \in L_p$. Como $|f - g_k|^p \leqslant 2^p g^p$, inferimos del teorema de la Convergencia Dominada que $0 = \lim \|f - g_k\|_p$, así que (g_k) converge en L^p a f.

En vista de que

$$\delta_p(f_m, f_n) = \int_X |f_m - f_n|^p \, d\mu < \epsilon^p,$$

si $m \geq M(\epsilon)$ y k es suficientemente grande, entonces

$$\delta_p(f_m, g_k) = \int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu < \epsilon^p.$$

Aplicando el Lema de Fatou concluímos que

$$\delta_p(f_m, f) = \int_X |f_m - f|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu \leqslant \epsilon^p,$$

siempre y cuando $m \geq M(\epsilon)$. Esto prueba que la sucesión (f_n) converge a f en la cuasinorma de L^p.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[2] Halmos, Paul Richard, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[3] Kalton, N. J., *The endomorphisms of* L_p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, Indiana University Math. J. **27**(1978) 353-381.

[4] Kalton, N. J., *The metric linear spaces* L_p *for* $0 < p < 1$, Amer. Math. Soc. **52**(1986) 55-69.

[5] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons. Inc. 1978.

[6] Pastrán R. Ricardo A., *Espacios métricos vectoriales de Lebesgue* L^p *con* $0 < p < 1$, trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia, Matemáticas, Bogotá, 2002.

[7] Rudin, Walter, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc. New York, 1974.