

ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DINÁMICOS, UNA INTRODUCCIÓN

David Blázquez-Sanz

Universitat Politècnica de Catalunya

Carlos A. Hurtado

Universidad Sergio Arboleda

El origen de este cuadernillo es un curso de introducción a los sistemas dinámicos continuos, dictado por el primer autor, en la universidad Sergio Arboleda, Bogotá, con motivo del 2º Encuentro Internacional de Matemáticas en dicha universidad en verano de 2006.

Si bien estas notas no son un material muy ambicioso, espero que este cuadernillo sea de utilidad para aquellos estudiantes que necesiten de una introducción a los sistemas dinámicos. En particular la sección 3, sobre sistemas lineales, ha sido añadida posteriormente en función de las necesidades didácticas observadas. Quiero agradecer la amabilidad y el apoyo de los profesores y alumnos de la universidad Sergio Arboleda. No hay espacio para nombrar a todas las personas, profesores y estudiantes a quienes debo agradecer su hospitalidad y amabilidad como visitante en Colombia.

Bogotá, Agosto de 2007.

David Blázquez.

Índice

1. Teoremas de existencia de soluciones para E.D.O.	4
1.1. Solución del problema de Cauchy: método de Picard	4
1.2. Dependencia con respecto a condiciones iniciales	8
2. Acción de Grupos Monoparamétricos	11
2.1. Preliminares en Acción de Grupos	11
2.1.1. Observaciones a las definiciones	12
2.2. Grupos monoparamétricos	12
2.3. Definiciones y observaciones:	13
2.4. Generador infinitesimal	13
2.4.1. Espacio tangente en un punto	13
2.4.2. Generador infinitesimal de un grupo	15
3. Sistemas lineales	18
3.1. Exponencial de matrices	19
3.1.1. Exponencial de una matriz diagonalizable	21
3.1.2. Valores complejos conjugados	22
3.1.3. Exponencial de una matriz general	24
3.2. Aspectos dinámicos de los sistemas lineales	26
3.2.1. Descomposición en espacios invariantes	26
3.2.2. Sistemas en el plano real \mathbb{R}^2	28
3.2.3. Apunte sobre la estabilidad estructural de los sistemas lineales	31
4. Sobre las soluciones de los sistemas autónomos	33
4.1. Existencia y unicidad de grupos uniparamétricos	33
4.2. Constantes del movimiento	35
4.2.1. Reducción del problema mediante integrales primeras . . .	35
4.2.2. Ejemplo: El problema de Kepler	36
4.3. Teorema de Reducción Local	42

5. Objetos Invariantes	44
5.1. La ecuación en variaciones	44
5.1.1. Variaciones a lo largo de una órbita	46
5.2. Sobre la estabilidad de puntos fijos	48
5.2.1. Estabilidad de los sistemas lineales	48
5.2.2. Estabilidad en el caso hiperbólico	48
5.2.3. Funcion de Liapjunov	49

1. Teoremas de existencia de soluciones para E.D.O.

Esta primera sección está dedicada a la demostración rigurosa de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales. El lector es libre de saltar por encima de las demostraciones en función de su fé en el análisis real.

Definición 1. Una **curva** en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.

γ se dice **diferenciable** si las funciones $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Analogamente se dice que γ es de clase $C^1, \dots, C^k, \dots, C^\infty$ si las funciones γ_i son $C^1, \dots, C^k, \dots, C^\infty$.

Una **ecuación diferencial ordinaria** resuelta con respecto a la derivada (en adelante e.d.o.) es una identidad.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, t) \quad i = 1, \dots, n \quad f : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_x^n \quad (\text{E1})$$

f continua.

Definición 2. Una curva diferenciable γ es **solución** de (E1) si

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = f_i(\gamma(t), t) \quad (\text{E2})$$

Se llama **problema de Cauchy** de la ecuación (E2) y condiciones iniciales $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, al problema de determinar las soluciones de (E1) tales que $\gamma : t_0 \rightarrow x_0$.

1.1. Solución del problema de Cauchy: método de Picard

Definición 3. Diremos que $f : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_x^n$ satisface una condición de **Lipschitz** con constante $K > 0$, si $\forall t \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq K \|x - y\|^1$$

¹en \mathbb{R}^n se considera la norma $\|x\| = \left(\sum_i x_i^2\right)^{1/2}$

Integrando la identidad (E2) obtenemos

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau), \tau) d\tau \quad (\text{E3})$$

Recíprocamente, si γ es una curva que satisface la identidad (E3), entonces, al derivar con respecto a t , deducimos que es una solución de la e.d.o. (E1). Hemos convertido entonces, la e.d.o. (E1) en una **ecuación integral** (E3)

Consideremos E_ε el espacio de las curvas definidas en el intervalo cerrado $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. E_ε es un espacio normado,

$$\|\gamma\| = \max_t \|\gamma(t)\|; \quad d(\gamma, \sigma) = \|\gamma - \sigma\|;$$

y **completo**, pues el límite uniforme de aplicaciones continuas es una aplicación continua.

Definimos en E_ε la siguiente transformación continua:

$$\Phi : E_\varepsilon \longrightarrow E_\varepsilon \quad \gamma \longmapsto \Phi_\varepsilon(\gamma) : t \longrightarrow x_0 + \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau), \tau) d\tau$$

Lema 1. γ verifica $\Phi_\varepsilon(\gamma) = \gamma$ si y sólo si γ es solución del problema de Cauchy.

Demostración. En primer lugar $\Phi_\varepsilon(\gamma)(t_0) = x_0$ por la definición de Φ . Entonces $\Phi_\varepsilon(\gamma) = \gamma$ es equivalente a la identidad (E3). \square

Por lo tanto, encontrar las soluciones del problema de Cauchy equivale a encontrar puntos fijos de Φ_ε

Definición 4. Una aplicación $\Phi : E \longrightarrow E$ en un espacio métrico, se llama **contractiva** si $\exists C < 1$ tal que $\forall x, y \in E$

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq Cd(x, y).$$

Teorema 1. Una aplicación contractiva en un espacio métrico **completo** tiene un único punto fijo.

Demostración. Sea $x_0 \in E \xrightarrow{\Phi} E$ cualquiera. Definimos $x_1 = \Phi(x_0)$, $x_2 = \Phi(x_1), \dots, \Phi^k(x_0) = x_k$. La sucesión verifica

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_n)) \leq Cd(x_{n-1}, x_n)$$

de aquí se deduce inmediatamente ($C < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0,$$

pues $d(x_n, x_{n+1}) \leq C^n d(x_0, x_1)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = 0$. Por otro lado, $\forall n, m$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \leq \sum_{i=0}^{m-1} d(x_n, x_{n+1}) C^i \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) \sum_{i=0}^{\infty} C^i = \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1-C} \\ &\leq \frac{C^n}{1-C} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Es decir $\forall n, m$ $d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{C^n}{1-C} d(x_0, x_1)$, y por tanto $\{x_n\}$ es una **sucesión de Cauchy**. En un espacio métrico completo, toda sucesión de Cauchy tiene límite. Sea

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Observación (1). x^* es un punto fijo, es decir, $\Phi(x^*) = x^*$, supongamos, razonando por reducción al absurdo $d(x^*, \Phi(x^*)) = D > 0$, por la desigualdad triángular se tiene $d(x_n, \Phi(x^*)) \geq D - d(x_n, x^*)$ tomando n_0 tal que $\forall n > n_0$ $d(x_n, x^*) < \frac{D}{3}$ tenemos $\forall n > n_0$

1. $d(x_n, \Phi(x^*)) > \frac{2D}{3}$
2. $d(x_n, x^*) < \frac{D}{3} \xrightarrow{\Phi} d(x_{n+1}, \Phi(x^*)) < \frac{CD}{3}$

con $C < 1$, luego por (1)

$$\frac{2D}{3} < d(x_{n+1}, \Phi(x^*)) < \frac{D}{3} \quad !!! \text{ contradicción.}$$

Observación (2). x^* es único: si hubiera dos puntos fijos x_1^* y x_2^* entonces $d(x_1^*, x_2^*) > Cd(x_1^*, x_2^*)$ con $c < 1$, lo que es absurdo. \square

Lema 2. Si $\varepsilon < \frac{1}{K}$, entonces Φ_ε es una aplicación contractiva

Demostración. Sean $\gamma, \sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas y $d(\gamma, \sigma) = \max_t \|\gamma(t) - \sigma(t)\|$, entonces

$$\begin{aligned} d(\Phi_\varepsilon \gamma, \Phi_\varepsilon \sigma) &= \max_t \left\| \int_{t_0}^t (f(\gamma(\tau), \tau) - f(\sigma(\tau), \tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \max_t \left| \int_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau), \tau) - f(\sigma(\tau), \tau)\| d\tau \right| \\ &\leq \max_t \left| \int_{t_0}^t \|\gamma(\tau) - \sigma(\tau)\| d\tau \right| \\ &\leq \max_t K \left| \int_{t_0}^t d(\gamma, \sigma) d\tau \right| \leq K\varepsilon d(\gamma, \sigma) \end{aligned}$$

Si $K\varepsilon < 1$ es contractiva. \square

Corolario 1. El problema de Cauchy de la ecuación (E1) con f K -Lipschitz tiene solución única en E_ε con $\varepsilon < \frac{1}{K}$.

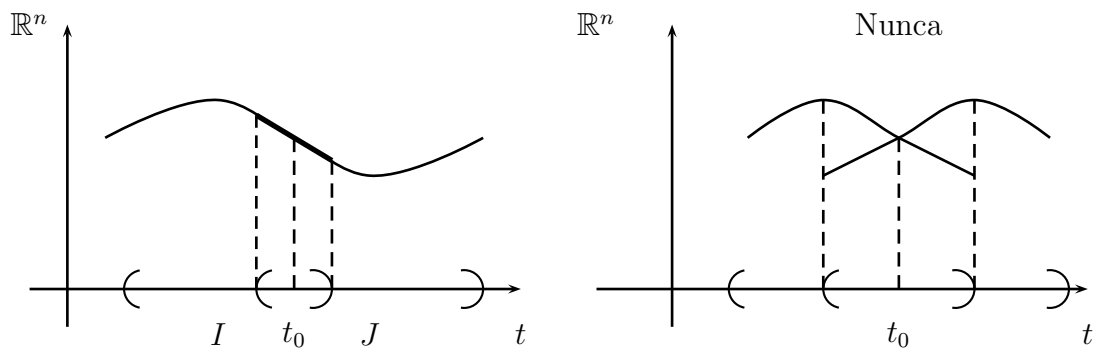
Corolario 2. El problema de Cauchy de (E1) con f K -Lipschitz tiene solución única $\gamma : (t_0 - \frac{1}{K}, t_0 + \frac{1}{K}) \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea γ_ε la solución en E_ε . Es inmediato que si $\varepsilon > \delta$, entonces γ_δ es la restricción de γ_ε a $[t_0 - \frac{1}{K}, t_0 + \frac{1}{K}]$. Como para cada $t \in (t_0 - \frac{1}{K}, t_0 + \frac{1}{K})$ hay un $\varepsilon > \frac{1}{K}$ tal que $t_0 \in [t_0 - \frac{1}{K}, t_0 + \frac{1}{K}]$ definimos

$$\gamma(t) = \gamma_\varepsilon(t). \quad \square$$

Teorema 2 (Teorema del Amor). Sean I, J dos intervalos reales y $t_0 \in I \cap J$. Sean γ_I, γ_J dos relaciones de (E1) con dominios de definición I y J respectivamente. Si $\gamma_I(t_0) = \gamma_J(t_0)$ entonces hay $\gamma : I \cap J \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución de (E1) cuya restricción coincide con ambas.

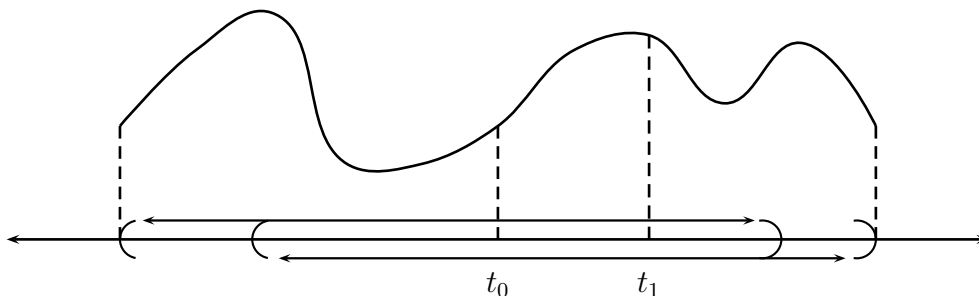
$$\gamma|_I = \gamma_I \quad \gamma|_J = \gamma_J$$



Teorema 3 (Teorema de Existencia y Unicidad). Supongamos que f (en E1) satisface una condición de Lipschitz, Entonces para $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, **hay una única** solución $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de E1, definida en todo \mathbb{R} , con $\gamma(t_0) = x_0$

Demostración. Recubrimos a \mathbb{R} con intervalos de la forma

$$I_n = \left(t_0 + \frac{n}{K} - 1 - \frac{1}{K}, t_0 + \frac{n}{K} - 1 + \frac{1}{K} \right)$$



Las soluciones a lo largo de cada intervalo se van completando de modo único según el teorema del Amor. \square

1.2. Dependencia con respecto a condiciones iniciales

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \lambda) \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^d \quad (\text{E4})$$

$f : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\lambda^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface $\forall t, \lambda, x, y$

$$\|f(x, t, \lambda) - f(y, t, \lambda)\| \leq K\|x - y\|.$$

(E4) es una e.d.o. que depende de los parámetros λ , por cada valor λ_0 obtenemos una e.d.o

$$\frac{dx}{dt} = f_{\lambda_0}(x, t) \quad \text{con} \quad f_{\lambda_0}(x, t) = f(x, t, \lambda)$$

que no depende de parámetros. Vamos a ver como la solución del problema de Cauchy depende del parámetro λ .

Sea $t_0 \rightarrow x_0$ y $E_\varepsilon = \{[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}_\lambda^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ aplicaciones continuas}\}$, $\gamma \in E_\varepsilon$
 $\gamma(t, \lambda) = \gamma_\lambda(t)$ curvas dependientes de parámetros.

E_ε no es un espacio de Banach. pero es un espacio de **Frechet**. Sin entrar en detalles técnicos, lo que necesitamos saber es que se verifican teoremas análogos:

$$\Phi : E_\varepsilon \rightarrow E_\varepsilon \quad \Phi_\varepsilon(\gamma)(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau, \lambda), \tau, \lambda) d\tau$$

1. Si $\varepsilon < \frac{1}{K}$, Φ_ε es contractiva (por las semi normas de convergencia en compactos)
2. Hay una única solución $\gamma : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\lambda^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t_0, \lambda) \rightarrow x_0 \forall \lambda$ del problema de Cauchy.

Teorema 4. Si f es de clase C^∞ en λ , entonces γ es de clase C^∞ en γ (puede sustituirse C^∞ por C^k , C^ω).

Demostración. γ verifica la ecuación integral

$$\gamma(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau, \lambda), \tau, \lambda) d\tau.$$

por derivación bajo el signo integral:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} \gamma}{\partial \lambda^\alpha} = \int_{t_0}^t \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \lambda^\alpha} f(\gamma(\tau, \lambda), \tau, \lambda) d\tau. \quad \square$$

Teorema 5 (Dependencia con respecto a condiciones iniciales). Consideremos la ecuación (E1) y supongamos:

- a) f satisface una condición de Lipschitz (global).

b) f es de clase C^k con respecto a las t, x_i (ó C^∞, C^ω).

entonces existe una única $\gamma : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{t_0} \times \mathbb{R}_{x_0}^n \longrightarrow \mathbb{R}_x^n$ verificando

1. $\frac{d\gamma}{dt} = f(\gamma(t - t_0, t_0, x_0), t - t_0)$

2. $\gamma(0, t_0, x_0) = x_0$

y γ es de clase C^k con respecto a las t, x_i (ó C^∞, C^ω).

Demostración. en el problema de Cauchy $x_0 \longleftarrow t_0$, consideremos,

$$t = t_0 + \zeta; \quad x = x_0 + \xi.$$

de manera que la ecuación (E1) se escribe como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{d\zeta} = f(x_0 + \xi, t_0 + \zeta) = F(\xi, \eta, t_0, x_0),$$

es decir,

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = F(\xi, \zeta, t_0, x_0) \tag{E5}$$

es una e.d.o. que depende de los parámetros t_0, x_0 . La solución del problema de Cauchy de (E4) con condición inicial $\zeta_0 = 0, \tau_0 = 0$ es la γ que buscamos. por el teorema 4. Es regular. \square

2. Acción de Grupos Monoparamétricos

2.1. Preliminares en Acción de Grupos

Un sistema dinámico continuo no es otra cosa que la acción de un grupo continuo, isomorfo a \mathbb{R} con la suma, sobre un cierto espacio (que denominaremos **espacio de fases**). Esta acción de \mathbb{R} viene a representar el concepto de evolución con respecto al tiempo. Por este motivo, consideramos oportuno revisar el concepto de la acción de un grupo en un conjunto.

Sean G un grupo y X un conjunto.

Definición 5. Una **acción** de G en X es una ley de composición

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \star x \in X \end{aligned}$$

verificando

1. Si e es el elemento neutro de G , entonces $\forall x \ e \star x = x$
2. $\forall g, h, x \ g \star (h \star x) = (g \star h) \star x$

Observación. El conjunto de las biyecciones $X \longrightarrow X$ es un grupo $\text{Perm}(X)$. Entonces una acción \star es equivalente a un morfismo de grupos.

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow \text{Perm}(X) \\ g \star x &\longmapsto \Phi_\star(g) \end{aligned}$$

Definición 6. ■ Dado $x \in X$ se llama **grupo de isotropía** de x a

$$H_x = \{g \in G : g \star x = x\} \subset G.$$

- Dado $x \in X$ se llama **órbita** de x a

$$\mathcal{O} = \{y \in X : \exists g \in G \text{ con } y = g \star x\} \subset X.$$

- Una acción se dice **fiel** si cada $g \in G$ mueve alguna parte de X . Es decir si $\text{Ker}\Phi_\star = \{e\}$
- Una acción se dice **transitiva** si $\forall x, y \exists g$ tal que $g \star x = y$.

2.1.1. Observaciones a las definiciones

- Si H_x es la isotropía de X . Hay un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x &\longrightarrow G/H_x \\ y &\longmapsto gH_x \end{aligned}$$

(donde $g \star x = y$)

- Si $y \in \mathcal{O}_x$, entonces $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ y además H_x y H_y son subgrupos conjugados. Si $g \star x = y$ entonces $gH_xg^{-1} = H_y$

2.2. Grupos monoparamétricos

Sea U un abierto de \mathbb{R}^n (análogamente podemos considerar U una vecindad diferenciable cualquiera).

Definición 7. Llamaremos $\text{Aut}(U)$ al conjunto de los difeomorfismos (aplicaciones diferenciables y de inversa diferenciable) $U \longrightarrow U$.

Definición 8. Un grupo **monoparamétrico de transformaciones** de U en un subgrupo $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \text{Aut}(U)$ indexado por los números reales, que verifica:

I $\sigma_0 = \text{id}_U$

II $\sigma_s \sigma_t = \sigma_{s+t}$

III La aplicación $\mathbb{R} \times U \longrightarrow U$, $(t, x) \longmapsto \sigma_t(x)$, es diferenciable.

Observación. Un grupo monoparamétrico es, por definición, una acción diferenciable del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ en U , o equivalentemente un morfismo de grupos $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (U)$ (continuo en la topología diferenciable de $\text{Aut}(U)$).

Algunos ejemplos:

1. Sea $U = \mathbb{R}$ y $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido de la siguiente manera.

$$\sigma_t(x) = x + t$$

este es el grupo de las traslaciones.

2. Sea $U = \mathbb{R}$ y $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido de la siguiente manera:

$$\sigma_t(x) = e^t x;$$

Este es el grupo de las homotecias.

3. Sea ahora $U = \mathbb{R}^2$, el plano, y sea ahora

$$\sigma_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$

este es el grupo de las rotaciones:

2.3. Definiciones y observaciones:

- La órbita de un punto o una curva diferenciable.
- x se dice
 - Un **punto fijo** si $\forall t \sigma_t(x) = x$, es decir $\mathcal{O}_x = \{x\}$
 - Un **punto periódico** si $\exists T$ tal que $\sigma_T(x) = x$. Si T es el mínimo positivo verificando $\sigma_T(x) = x$, T es el **periodo** de x . Se dice que \mathcal{O}_x es una **órbita periódica**

2.4. Generador infinitesimal

2.4.1. Espacio tangente en un punto

Sea $p \in U$. Un vector tangente X_p en p , es un **desplazamiento infinitesimal** del punto p en U . dedicamos esta sección a aclarar este concepto.

Definición 9. Llamaremos **derivación** en p a toda aplicación \mathbb{R} -lineal $D_p : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica la fórmula de Leibnitz.

$$\forall f \forall g \quad D_p(fg) = f(p)D_p g + g(p)D_p f.$$

La suma de dos derivaciones en p es una derivación en p y así mismo el producto por un escalar. Por tanto el conjunto de las derivaciones en p tiene una estructura de espacio vectorial real. Lo denotamos por $T_p(U)$.

Ejemplo. Consideremos la aplicación

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)$$

entonces $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p$ es una derivación, así como $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$. Por tanto cualquier combinación

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \dots + \lambda_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

es una derivación en p .

Teorema 6. $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}$ es una base de $T_p(U)$. Para cualquier derivación D_p , se tiene

$$D_p = (D_p x_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \dots + (D_p x_n) \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

Demostración.

I. Son linealmente independientes

Supongamos $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p = \sum_{i=2}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$. Entonces, aplicando dicha derivación

a x_1 , obtenemos $1 = 0$, por tanto es imposible escribir $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p$ como combinación lineal de las demás.

II. generan el espacio

Sea $D_p \in T_p(U)$, y sea $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Calculemos $D_p f$ tomando el desarrollo de Taylor de orden 2 de f , en p

$$f = f(p) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (x_i - x_i(p)) + \sum_{i,j} r_{ij}(x)(x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p)).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} D_p f &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p D_p(x_i - x_i(p)) + \sum_{i,j} (D_p[r_{ij}(x_i - x_i(p))]) \\ &+ r_{ij} D_p(x_i - x_i(p)) = \sum_i (D_p x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p. \end{aligned}$$

lo que prueba:

$$D_p = \sum_i (D_p x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p. \quad \square$$

Consideremos ahora dos curvas $\gamma, \sigma : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\gamma(0) = \sigma(0) = p$. Se dice que γ, σ **son tangentes** en p , cuando para todo $f \in C^\infty(U)$ se tiene

$$\frac{d}{dt}_{t=0} f(\gamma(t)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(\sigma(t)).$$

Es inmediato que la aplicación $f \mapsto \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(\gamma(t))$ es una derivación en p . Esta derivación se llama **vector tangente a γ en p** . Dos curvas son tangentes si tienen el mismo vector tangente.

Teorema 7. Toda derivación en p es el vector tangente de alguna curva.

Demostración. Sea $D_p = \sum_i \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$. Entonces consideremos la curva $\gamma : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ con $\gamma_i(t) = x_i(p) + \lambda_i t$.

Se comprueba que el vector tangente a γ en p es precisamente D_p . \square

El teorema anterior motiva que llamemos **espacio tangente en p** al espacio $T_p(U)$ de las derivaciones en p .

2.4.2. Generador infinitesimal de un grupo

Definición 10. Se llama **campo vectorial** X en $U \subset \mathbb{R}^n$ a una ley que asigna a cada punto $p \in U$ un vector tangente $x_p \in T_p(U)$. $X : p \mapsto x_p$.

X se dice **diferenciable** si puede escribirse como

$$X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{E6}$$

con $f_i \in C^\infty(U)$. Entonces $X_p = \sum_i f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}_p$. supondremos que todo campo vectorial es diferenciable.

Definición 11. se llama **sistema autónomo** en U a una e.d.o.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) \quad f_i \in \mathcal{C}^\infty(U) \quad (\text{E7})$$

Los campos vectoriales y los sistemas autónomos son equivalentes en el siguiente sentido: una curva γ es solución de (E7) si y sólo si por cada para cada t , el vector tangente a γ en $\gamma(t)$ es $X_{\gamma(t)}$. En adelante todo sistema autónomo será considerado como un campo vectorial.

Con respecto a los sistemas de e.d.o. no autónomos,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, y) \quad f_i \in \mathcal{C}^\infty(U) \quad U \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$$

cabe decir que añadiendo una nueva variable τ , el sistema se transforma en

$$\frac{dx_i}{d\tau} = f_i(x, y), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1$$

que es un sistema autónomo, y por tanto, **toda e.d.o. puede ser entendida como un campo vectorial.**

Definición 12. Sea $\{\sigma_t\}$ un grupo monoparamétrico de transformaciones de U . Llamamos **generador infinitesimal** de $\{\sigma_t\}$ al campo vectorial que asigna al punto p , al vector tangente a la curva $(-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto U, t \mapsto \sigma_t(p)$.

Consideremos $\Phi : \mathbb{R} \times U \longrightarrow U$ la aplicación flujo del grupo $\Phi(t, p) = \sigma_t(p)$. Entonces el generador infinitesimal puede considerarse

$$X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ejemplos. Grupo de Traslaciones $U = \mathbb{R}, \sigma_t(x) = x + t$. Entonces la aplicación flujo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}, \Phi(t, x) = x + t$.

$$X = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Grupo de homotecias $U = \mathbb{R}, \sigma_t(x) = e^t \cdot x$. La aplicación flujo es $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}, \Phi(t, x) = e^t \cdot x$, y

$$X = \left(\frac{d}{dt} e^t \cdot x \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x} = x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Grupo de rotaciones $U = \mathbb{R}^2$, $\sigma_t(x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t)$,
 $\Phi(t, x, y) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t)$,

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{\partial}{\partial t}(x \cos t + y \operatorname{sen} t) \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial t}(x \operatorname{sen} t + y \cos t) \right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Teorema 8. El generador infinitesimal determina el grupo.

Demostración. La solución de una ecuación diferencial es única, el flujo del grupo es la solución del generador infinitesimal entendido como sistema autónomo.

3. Sistemas lineales

Consideremos \mathbb{R}^n con su estructura de espacio vectorial. Una automorfismo lineal $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ viene dada por una matriz no singular (σ_{ij}) .

$$\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Un grupo monoparamétrico $\{\sigma_t\}$ de automorfismos lineales de \mathbb{R}^n está determinado por n^2 funciones

$$\sigma_t(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_j \sigma_{1j}(t)x_j, \dots, \sum_j \sigma_{nj}(t)x_j \right)$$

y por tanto

$$\left(\frac{dx_i(\sigma_t(p))}{dt} \right)_{t=0} = \sum_j \left(\frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right)_{t=0} x_j(p),$$

llamando a_{ij} a $\frac{\sigma_{ij}}{dt}$ en $t = 0$, el generador infinitesimal de $\{\sigma_t\}$ se escribe,

$$\vec{X} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Por tanto llamaremos **campo vectorial lineal** a cualquier combinación lineal a coeficientes constantes de los n^2 campos $x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. La teoría que permite integrar dichos sistemas es fundamentalmente algebraica, y es conceptualmente más simple si se toman coeficientes números complejos. Traduciendo tales campos vectoriales a ecuaciones diferenciales se obtiene la siguiente definición.

Definición 13. Un sistema lineal de rango n es una ecuación diferencial,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

o abreviadamente

$$\dot{x} = A.x, \tag{SL}$$

donde A es una matriz $n \times n$ de coeficientes en \mathbb{C} .

El ejemplo más sencillo de sistema lineal se obtiene cuando $n = 1$. En tal caso, el sistema

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

se resuelve inmediatamente por separación de variables,

$$\int \frac{dx}{x} = \lambda dt, \quad \log(x(t) - x_0) = \lambda t,$$

$$\frac{x(t)}{x_0} = e^{\lambda t}, \quad x(t) = e^{\lambda t} x_0,$$

y entonces el automorfismo lineal σ_t es precisamente la homotecia de razón $e^{\lambda t}$. De aquí se desprende un primer lema.

Lema 3. Si x_0 es un vector propio de A , con $A.x_0 = \lambda x_0$, entonces $x(t) = e^{\lambda t} x_0$ es la solución de (SL) con $x(0) = x_0$.

Demostración. Basta derivar $e^{\lambda t} x_0$ para obtener $\lambda e^{\lambda t} x_0$ y se concluye. \square

3.1. Exponencial de matrices

Se expone a continuación cómo el sistema completo (SL) se resuelve análogamente, al caso de rango 1. Es decir, la solución general de (SL) es precisamente $x(t) = e^{tA}.x_0$ ¿Cómo es esto posible? Es necesario hacer una reflexión sobre la naturaleza de la función exponencial. Dicha función $e^{\lambda t}$, es la solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = \lambda x$ con condición inicial $x(0) = 1$. Si uno trata de construir tal solución mediante una serie de potencias,

$$x(t) = 1 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} + a_3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

derivando y dividiendo por λ ,

$$\lambda^{-1} \dot{x}(t) = \lambda^{-1} a_1 + \lambda^{-1} a_2 t + \lambda^{-1} a_3 \frac{t^2}{2} + \lambda^{-1} a_4 \frac{t^3}{3!} + \dots,$$

y la igualdad de dichas series de potencias, nos determina todos los coeficientes recurrentemente, $a_1 = \lambda$, $a_2 = \lambda a_1 = \lambda^2$, \dots , $a_k = \lambda a_{k-1} = \lambda^k$ y por tanto,

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_k \frac{\lambda^k t^k}{k!},$$

como es bien conocido en análisis matemático elemental. Podemos implementar el mismo proceso para matrices, construyendo soluciones para los sistemas lineales.

Definición 14. Sea A una matriz $n \times n$ a coeficientes complejos. Llamamos función exponencial e^{tA} a la función que a cada valor de t le asigna la matriz suma de la serie de potencias,

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}.$$

Observamos que dicha serie de potencias es normalmente convergente, tomando normas directamente sobre la expresión, se obtiene la cota,

$$\|e^{tA}\| \leq e^{|t|}e^{\|A\|} \quad 2$$

y la convergencia normal nos permite realizar todo tipo de operaciones algebraicas, como el reordenamiento y la derivación.

Teorema 9. Consideremos $\sigma_t: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ el automorfismo lineal que hace

$$\sigma_t: x \mapsto e^{tA}.x$$

Entonces, $\{\sigma_t\}_t$ es el grupo monoparamétrico cuyo generador infinitesimal es $\vec{X} = \sum_{ij} a_{ij}x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$. Equivalentemente la solución general de (SL) es

$$x(t) = e^{tA}.x_0.$$

Demostración. Hemos de verificar que $\frac{de^{tA}.x_0}{dt} = A.(e^{tA}.x_0)$, para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$, es decir³ que $\frac{de^{tA}}{dt} = A.e^{tA}$. Recordemos:

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!}$$

derivando con respecto a t ,

$$\frac{de^{tA}}{dt} = A + tA^2 + \frac{t^2}{2}A^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^{n+1} = A \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = A.e^{tA},$$

se concluye. \square

²Para la norma $\|A\| = \max_x \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$ se verifica $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ y $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

³pues $\frac{dB.x}{dt} = \dot{B}.x + B.\dot{x}$

3.1.1. Exponencial de una matriz diagonalizable

Consideremos una matriz diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

y escribiendo e^{tD} en serie de potencias se sigue que

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, calcular la exponencial de una matriz diagonal no es mucha novedad,. Es equivalente a resolver el sistema lineal

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

que ya sabíamos resolver: se trata de n ecuaciones independientes, o **desacopladas**. La solución general es $x_i = e^{\lambda_i t} x_i(0)$. Sin embargo un gran número de sistemas lineales pueden reducirse a este caso, como se deduce de la siguiente afirmación.

Afirmación. Consideremos A y B dos matrices conjugadas, $A = CBC^{-1}$. Entonces se verifica $e^{tA} = Ce^{tB}C^{-1}$.

Demostración. En primer lugar, la misma conjugación es inmediatamente válida para las potencias de A y B , $A^2 = CBC^{-1}CBC^{-1} = CB^2C^{-1}$, en general $A^n = CB^nC^{-1}$. Aplicando esto al desarrollo en serie de la función exponencial,

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots = I + tCBC^{-1} + \frac{t^2}{2}CB^2C^{-1} + \frac{t^3}{3!}CB^3C^{-1} + \dots =$$

$$= C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n \right) C^{-1} = C e^{Bt} C^{-1} \quad \square$$

Consideremos el sistema (SL). Si A es diagonalizable, y $A = CDC^{-1}$ con D diagonal, entonces la solución general del sistema es $x(t) = Ce^{tD}C^{-1}x_0$. En ocasiones este resultado se presenta como un cambio de coordenadas. Si consideramos $z = C^{-1}x$, entonces $z(t) = e^{tD}z_0$.

Ejemplo. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$. Se escribe como un sistema lineal,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

El vector $(1, 1)$ es un vector propio de valor propio 1, y $(1, -1)$ es un vector propio de valor propio -1 . Se tiene la conjugación,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

y de aquí,

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = {}^4 \begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$$

see trata del grupo de rotaciones hiperbólicas, la solución general es,

$$x(t) = ch(t)x_0 + sh(t)y_0, \quad y(t) = sh(t)x_0 + ch(t)y_0.$$

3.1.2. Valores complejos conjugados

Los valores propios de la matriz A son las raíces del polinomio característico $|\xi I - A|$. Cuando A es una **matriz real**, es decir, cuando estamos tratando con un sistema lineal real, entonces los valores propios complejos viene por parejas. Si $\lambda = a + bi$ es un valor propio, entonces $\bar{\lambda} = a - bi$ también lo es.

⁴Las funciones hiperbólicas se definen $sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ y $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Segun hemos visto, los valores propios reales, corresponden a vectores propios reales en los cuales hay una dinámica exponencial. Uno de los problemas de los valores propios complejos, es que no corresponden a vectores propios reales, sino a vectores propios complejos. ¿Podemos explicar entonces las soluciones de los sistemas lineales en términos de números reales?

La respuesta es afirmativa. Consideremos $\lambda, \bar{\lambda}$ valores propios simples complejos conjugados, y sean v y \bar{v} sus respectivos vectores propios. Es claro que las coordenadas de \bar{v} son complejos conjugados de las de v . En el plano $\langle v, \bar{v} \rangle$ tomamos coordenadas ξ, η

$$\xi v + \eta \bar{v}.$$

El sistema lineal en $\langle v, \bar{v} \rangle$ se escribe en dichas coordenadas,

$$\dot{\xi} = \lambda \xi, \quad \dot{\eta} = \bar{\lambda} \eta$$

y por tanto la solución general, sobre este plano es

$$\xi(t) = e^{\lambda t} \xi_0, \quad \eta(t) = e^{\bar{\lambda} t} \eta_0.$$

Observemos que los vectores $u_1 = \frac{v+\bar{v}}{2}$ y $u_2 = \frac{v-\bar{v}}{2i}$, son **reales**. Estudiemos la dinámica sobre el plano real $\langle u_1, u_2 \rangle$. Consideremos coordenadas x, y , para $xu_1 + yu_2$. Del cambio de base,

$$\xi v + \eta \bar{v} = \xi(u_1 + iu_2) + \eta(u_1 - iu_2) = (\xi + \eta)u_1 + i(\xi - \eta)u_2$$

$$xu_1 + yu_2 = \frac{x - iy}{2}v + \frac{x + iy}{2}\bar{v}$$

Se tiene que $x = \xi + \eta$, e $y = i(\xi - \eta)$, y que $\xi = \frac{x-iy}{2}$, y $\eta = \frac{x+iy}{2}$.

Expresando las soluciones de la ecuación diferencial en función de x, y , obtenemos

$$x(t) = e^{\lambda t} \xi_0 + e^{\bar{\lambda} t} \eta_0 = e^{\lambda t} \frac{x_0 - iy_0}{2} + e^{\bar{\lambda} t} \frac{x_0 + iy_0}{2} = \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} x_0 + \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} y_0$$

$$y(t) = ie^{\lambda t} \xi_0 - ie^{\bar{\lambda} t} \eta_0 = ie^{\lambda t} \frac{x_0 - iy_0}{2} - ie^{\bar{\lambda} t} \frac{x_0 + iy_0}{2} = -\frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} x_0 + \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} y_0$$

Tomando partes reales e imaginarias $\lambda = a + bi$, escribimos

$$x(t) = e^{at} \left(\frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} x_0 + \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} y_0 \right)$$

$$y(t) = e^{at} \left(-\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} x_0 + \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2} y_0 \right),$$

utilizando las fórmulas de Euler⁵, escribimos por fin

$$x(t) = e^{at} (\cos(bt)x_0 + \operatorname{sen}(bt)y_0), \quad y(t) = e^{at} (-\operatorname{sen}(bt)x_0 + \cos(bt)y_0),$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \operatorname{sen}(bt) \\ -\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Las soluciones son entonces, en tal sistema de coordenadas, espirales logarítmicas cuyo radio crece exponencialmente según e^{at} (decrecen si $a \leq 0$) y giran a velocidad angular constante b . Cuando $b = 0$, las soluciones son circunferencias en el sistema de coordenadas x, y , y por tanto elipses en cualquier otro sistema de coordenadas.

Ejercicio. Calcule la exponencial de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

utilizando el desarrollo en serie de potencias.

3.1.3. Exponencial de una matriz general

En este apartado exponemos como calcular la exponencial de una matriz no diagonalizable. Para ello haremos uso de la forma canónica de Jordan.

Observación. Si descomponemos la matriz A , en cuatro submatrices

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

⁵ $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

de manera tal que las A_1 y A_2 son matrices cuadradas, entonces:

$$A^2 = \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{12}A_{21} + A_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Se sigue inmediatamente que si J es una matriz descompuesta en m bloques de Jordan independientes,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

entonces

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^k \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$$

En general, para cualquier matriz A tenemos conjugación con su forma canónica de Jordan $A = CJC^{-1}$. Se desprende que es suficiente saber calcular la exponencial de los bloques de Jordan J_i .

Un bloque de Jordan de rango r correspondiente a un valor propio λ , es una matriz cuadrada $r \times r$ de la forma,

$$J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Podemos escribir

$$J(\lambda, r) = \lambda I + N(r)$$

donde $N(r)$ es la matriz cuyos elementos son 1 bajo la diagonal, y el resto nulos. Se tiene que $N^r = 0$, es decir, N es nilpotente.

Teorema 10. Sean A, B matrices cuadradas que conmutan, es decir, tales que $AB = BA$. Entonces $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$.

Demostración. Realicesé el producto de las series de potencias y agrúpense los términos. Deben obtenerse números combinatorios, por balance de los factoriales.

Ejercicio al lector. \square

Según la fórmula anterior,

$$e^{tJ(\lambda,r)} = e^{\lambda t} e^{tN(r)},$$

y la nihilpotencia de $N(r)$ nos indica que toda serie de potencias es una suma finita, en particular

$$\begin{aligned} e^{tN(r)} &= I + tN(r) + \frac{t^2}{2!}N(r)^2 + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}N(r)^{r-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} & \dots & \dots & t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^{tJ(\lambda,r)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & & & & \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} & & & \\ \frac{t^2 e^{\lambda t}}{2!} & te^{\lambda t} & e^{\lambda t} & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{r-1} e^{\lambda t}}{(r-1)!} & \dots & \dots & te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2x + y, \quad \dot{z} = 4x + 2y + z.$$

3.2. Aspectos dinámicos de los sistemas lineales

3.2.1. Descomposición en espacios invariantes

Consideremos el sistema lineal $\dot{x} = A.x$ (SL), a coeficientes en \mathbb{R} . De la exponencial por bloques para matrices de Jordan se deduce el siguiente resultado.

Teorema 11. Si $E \subset \mathbb{C}^n$ es un subespacio vectorial invariante para A , es decir que para todo $x \in E$ se tiene $A.x \in E$, entonces para cualquier solución $x(t)$ que pase por E , permanece indefinida en E .

Es decir, que los subespacios invariantes para A , son también subespacios invariantes para la acción del grupo monoparamétrico correspondiente.

Sea $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ el espectro de A , es decir el conjunto de las raíces del polinomio característico. A cada valor λ_i le corresponde un espacio invariante E_i , donde,

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_r.$$

Como nuestro sistema es real, algunas de estos λ_i son valores propios complejos conjugados. Agrupando los subespacios correspondientes a estas parejas, obtenemos una nueva descomposición,

$$\mathbb{C}^n = F_1 \oplus \dots \oplus F_s,$$

que tiene la ventaja de que además,

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_s,$$

para $V_i = F_i \cap \mathbb{R}^n$.

Cada V_i es un subespacio invariante real, al que le corresponde, o bien un valor propio real λ_i , o bien una pareja de valores propios complejos conjugados $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$.

Teorema 12. Sea $x(t)$ una solución del sistema lineal contenida en V_i . Sea μ la parte real de los valores propios (o el valor propio) correspondiente a V_i .

- Si $\mu > 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty$, y $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.
- Si $\mu < 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, y $\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = \infty$.
- Si $\mu = 0$, y A diagonaliza sobre V_i descompone en subespacios invariantes de dimensión 2, entonces $x(t)$ es una órbita periódica.

Es decir, cuando $\mu > 0$, el origen es un punto repulsor, cuando $\mu < 0$ el origen es un punto atractor, y cuando $\mu = 0$, genéricamente el origen es un centro rodeado de órbitas periódicas.

Podemos agrupar los espacios V_i , de manera que:

$$\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^- \oplus E^0,$$

E^+ es el espacio al que corresponden los valores propios con parte real positiva, E^- es el espacio al que corresponden los valores propios con parte real negativa, y E^0 es el espacio al que corresponden los valores imaginarios puros.

Definición 15. El sistema lineal $\dot{x} = A.x$ se dice:

- Hiperbólico si $\mathbb{R}^n = E^+ \oplus E^-$.
 - Atractor global si $\mathbb{R}^n = E^-$.
 - Repulsor global si $\mathbb{R}^n = E^+$.
- Elíptico si $\mathbb{R}^n = E^0$.
- Parabólico si $0 \neq E^0 \neq \mathbb{R}^n$.

3.2.2. Sistemas en el plano real \mathbb{R}^2

Consideremos ahora un sistema lineal real 2×2 ,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sean,

$$T = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

la traza y el determinante. Entonces el polinomio característico es,

$$\xi^2 - T\xi + \Delta,$$

y los valores propios

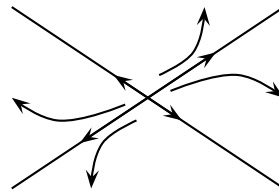
$$\lambda = \frac{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}, \quad \mu = \frac{T - \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Podemos hacer una discusión cualitativa de la dinámica en función de los valores de T y Δ .

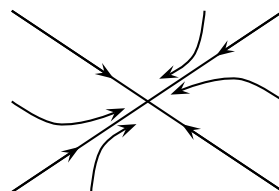
a.) Si $T^2 - 4\Delta > 0$ hay dos valores propios reales distintos,

a.i) si $\Delta > 0$, entonces tienen el mismo signo,

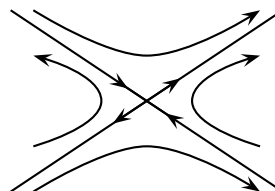
a.i.1) si $T > 0$ entonces ambos son positivos. El sistema es hiperbólico repulsor, con dos direcciones invariantes.



a.i.2) si $T < 0$ ambos son negativos. El sistema es hiperbólico atractor con dos direcciones invariantes.



a.ii) si $\Delta < 0$, entonces tiene signos contrarios. El sistema es hiperbólico con una dirección invariante repulsora, y otra dirección invariante atractora.



a.iii) si $\Delta = 0$, entonces hay un valor propio nulo. El sistema es parabólico y tiene una recta de puntos fijos,

a.iii.1) atractora si $T < 0$.

a.iii.2) repulsora si $T > 0$.

b.) si $T^2 - 4\Delta < 0$ hay dos valores propios complejos conjugados,

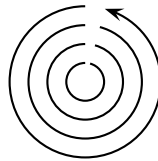
b.i.) si $T > 0$ entonces sus partes reales son positivas. El sistema es un foco repulsor espiral (fuente).



b.ii) si $T < 0$ entonces sus partes reales son negativas. El sistema es un foco atractor espiral (sumidero).



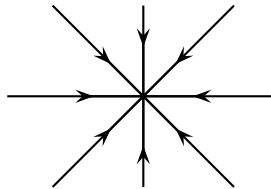
b.iii) si $T = 0$ entonces son imaginarios puros. El sistema es un centro lineal.



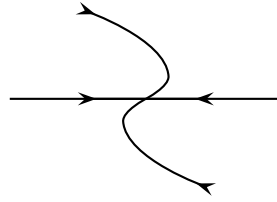
c.) si $T^2 - 4\Delta = 0$ hay un único valor propio real $\lambda = \mu$,

c.i.) si $\lambda > 0$ tenemos un atractor,

c.i.1.) si $A = \lambda I$ el atractor es un foco, con todas las direcciones invariantes.

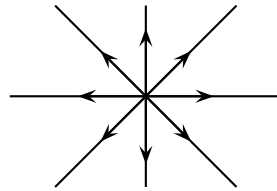


c.i.2.) si $A \neq \lambda I$ el atractor es un nodo con una única dirección invariante.

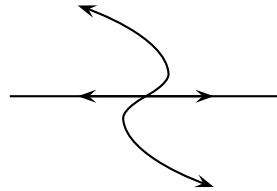


c.ii.) si $\lambda < 0$ tenemos un repulsor,

c.ii.1.) si $A = \lambda I$ el repulsor es un foco, con todas las direcciones invariantes.



c.ii.2.) si $A \neq \lambda I$ el repulsor es un nodo con una única dirección invariante.

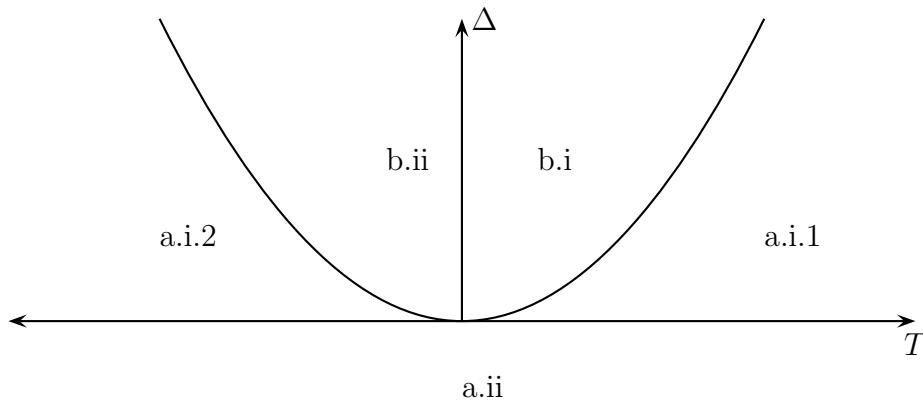


3.2.3. Apunte sobre la estabilidad estructural de los sistemas lineales

Al efectuar el análisis anterior sobre el plano de parámetros T, Δ , observamos que los casos definidos mediante desigualdades (a.i.1, a.i.2, a.ii, b.i, b.ii) ocurren en abiertos del plano. Esto significa que para sistema que pertenece a uno estos casos, hay un entorno abierto de sistemas que se comportan de la misma manera. Es decir, que si alteramos el sistema mediante una pequeña perturbación que haga variar ligeramente T y Δ , el sistema alterado sigue comportandose igual que el anterior. Estos sistemas reciben el nombre de *estructuralmente estables*.

Los otros caso, que ocurren sobre cerrados del plano T, Δ , corresponden a las *bifurcaciones* que ocurren cuando un sistema pasa de tener un comportamiento

estable a otro diferente. Por ejemplo, si un sistema pasa de ser un sumidero a ser una fuente, durante la transición necesariamente debe de ser un centro.



4. Sobre las soluciones de los sistemas autónomos

4.1. Existencia y unicidad de grupos uniparamétricos

Sea \vec{X} campo vectorial en \mathbb{R}^n .

$$\vec{X} = f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

y suponemos que las funciones f_i satisfacen una condición de Lipschitz. Aplicando el teorema de existencia y unicidad local, obtenemos que existe una única función.

$$\Phi : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^h \longrightarrow \mathbb{R}_x^n$$

tal que

1. $\Phi(0, x) = x$
2. $\frac{d\Phi}{dt}(t, x) = f(x)$

es el flujo del campo \vec{X} . En tal caso el grupo $\{\sigma_t\}$, $\sigma_t(x) = \Phi(t, x)$, es un **grupo monoparamétrico** de transformaciones de \mathbb{R}^n , y su generador infinitesimal es \vec{X} .

¿Que ocurre cuando \vec{X} no satisface una condición de Lipschitz?, consideremos ahora $U \subseteq \mathbb{R}^n$, y \vec{X} un campo vectorial en U .

$$\vec{X} = f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in C^\infty(U)$$

Definición 16. \vec{X} es completo si tiene una solución definida para todo \mathbb{R} , es decir

$$\Phi : \mathbb{R}_t \times U \longrightarrow U.$$

Un **campo completo** es el generador infinitesimal de un grupo monoparamétrico.

Definición 17. Sea \vec{X} campo vectorial en U . Se llama **soporte** de \vec{X} , $|\vec{X}|$, al conjunto

$$|\vec{X}| = \overline{\{p \in \vec{X}_p \neq 0\}} \cap U.$$

Teorema 13. Si \vec{X} tiene soporte compacto, entonces es completo.

Demostración. Si \vec{X} tiene soporte compacto, entonces puede **extenderse por cero** a todo \mathbb{R}^n . Si

$$\vec{X} = f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

con $|\vec{X}| = K$ compacto de \mathbb{R}^n , tenemos que las derivadas de las funciones f_i están acotadas (teorema de Weierstrass) y por el teorema del valor medio, hay una constante de Lipschitz global; el máximo de la norma de la diferencia de f en K . \square

Teorema 14. Sea \vec{X} campo vectorial en U . Para cada V **relativamente compacto** en U (significa $\bar{V} \cap U$ compacto), existe un campo \vec{X}^V tal que

1. por $p \in V$ $\vec{X}_p = \vec{X}_p^V$.
2. \vec{X}^V tiene soporte compacto.

Demostración. Si V es relativamente compacto, entonces hay u entorno de V , $\bar{V} \subset W \subset U$. Entonces \bar{V} y $\mathbb{R}^n - W$ son **cerrados disjuntos** y como \mathbb{R}^n es completamente normado, hay una función \mathcal{C}^∞ , λ que

1. $\lambda = 1$ en \bar{V} .
2. $\lambda = 0$ en $\mathbb{R}^n - W$

Tomando entonces $\vec{X}^V = \lambda \vec{X}$. \square .

Teorema 15 (Teorema de existencia y unicidad local). Sea $\vec{X} = f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campo en $U \subset \mathbb{R}^n$, $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Para cada $p \in U$ existe U_p , $\varepsilon > 0$ y una **única** función diferenciable Φ ,

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $\frac{d\Phi}{dt}(t, x) = f(x)$.

Demostración. Tomemos un abierto relativamente compacto V de p . construyamos el flujo completo de \vec{X}^V .

$$\Phi : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tomemos ε y U_p de manera que $\Phi^V((-\varepsilon, \varepsilon) \times U_p)$ esté contenido en V . \square

4.2. Constantes del movimiento

Consideremos $\vec{X} = f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, éste campo puede tomarse como un operador

$$\vec{X} : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad f \longmapsto \vec{X}f = f_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Definición 18. Una función $h \in \mathcal{C}^1 nfty(U)$ es una **integral primera** de \vec{X} si $\vec{X}h = 0$

Teorema 16. h es una integral primera de \vec{X} si y sólo si, a lo largo de cualquier curva solución $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow U$ de \vec{X} , el valor $h(\gamma(t))$ es constante.

Demostración. Basta observar que aplicar el campo vectorial es equivalente a derivar con respecto a k .

$$\frac{d}{dt}h(\gamma(t)) = \vec{X}_{\gamma(t)}h = 0. \quad \square$$

4.2.1. Reducción del problema mediante integrales primeras

Si x_1, \dots, x_n son las funciones coordenadas de U , entonces el campo \vec{X} se escribe

$$\vec{X} = (\vec{X}x_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

equivalentemente

$$\vec{X}x_i = \frac{d}{dx_i},$$

para tomar ventaja de la extensión de constantes del movimiento, es necesario poner a un nuevo sistema de coordenadas que incluya estas constantes.

Consideremos un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n .

$$\Psi : U \xrightarrow{\sim} V, \quad \Psi(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

el campo vectorial $\vec{X} = f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, puede expresarse en las coordenadas y_i , como un campo vectorial en V .

$$\Psi * \vec{X} = (\vec{X}y_i(x)) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

esta fórmula surge directamente de la regla de la cadena:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot f_1 + \cdots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \cdot f_n \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \cdot f_1 + \cdots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \cdot f_n \end{cases}$$

Suponemos ahora que h es una integral primera de \vec{X} . Si $\frac{\partial h}{\partial x_n} \neq 0$, entonces, al menos localmente, x_1, \dots, x_{n-1} forman un sistema de coordenadas. Por el teorema de la función implícita, puede escribirse

$$x_n = x_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h)$$

En nuestro nuevo sistema de coordenadas x_1, \dots, x_{n-1}, h la ecuación diferencial se escribe como

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h)) = F_1(x_1, \dots, x_{n-1}, h) \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n(x_1, \dots, x_{n-1}, h)) = F_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, h) \\ \frac{dh}{dt} = 0 \end{cases}$$

Si fijamos un valor de $h = h_0$ obtenemos entonces una ecuación diferencial en $n - 1$ variables x_1, \dots, x_{n-1} . Hemos reducido de esta manera el problema de una e.d.o. en dimensión n , a una familia de e.d.o. dependientes del parámetro h , en dimensión $n - 1$.

4.2.2. Ejemplo: El problema de Kepler

Vamos a estudiar ecuaciones de Newton para el movimiento planetario, veremos que las leyes de Kepler, están estrechamente relacionadas con las constantes del movimiento que aparecen en este sistema dinámico.

K1 Las orbitas de los planetas son elipses con el sol situado sobre un foco.

K2 La velocidad alrededor del movimiento de un planeta es constante.

K3 El cuadrado del periodo y el cubo del semieje mayor de la órbita de un planeta son proporcionales.

Supongamos que x_1, x_2 representan las posiciones en \mathbb{R}^3 de dos partículas dotadas de masas m_1, m_2 , que se mueven bajo la atracción gravitatoria la una respecto de la otra. Entonces, el movimiento de dichas partículas viene descrito por la ecuación de Newton:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \frac{Gm_2(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{\|x_2 - x_1\|^3} = \frac{Gm_2}{d_{12}^2} \vec{\mu}_{12} \\ \ddot{x}_2 &= \frac{Gm_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} = \frac{Gm_1}{d_{21}^2} \vec{\mu}_{21}\end{aligned}$$

Donde, d representa la distancia entre las partículas, y μ_{ij} es el vector unitario que apunta en la dirección de la partícula i a la partícula j .

Ecuación que interpretamos como un campo vectorial \vec{N} en \mathbb{R}^{12} ;

$$\vec{N} = \dot{x}_i^j \frac{\partial}{\partial x_i^j} + \ddot{x}_i^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i^j}$$

En el espacio de fases \mathbb{R}^{12} se define una función vectorial: el centro de masas, que denotamos por $X = (X_1, X_2, X_3)$.

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{M} = (X^1, X^2, X^3)$$

Aunque X no es una *constante del movimiento*, nos permite calcular rápidamente tres constantes. Llamamos *momento lineal* a la derivada con respecto del tiempo del centro de masas, es decir $\dot{X} = \vec{N}X$:

$$\vec{N}X = \frac{\dot{x}_1 m_1 + \dot{x}_2 m_2}{M} = (\dot{X}^1, \dot{X}^2, \dot{X}^3).$$

Al calcular, de nuevo, $\vec{N}\dot{X}$, uno obtiene

$$\vec{N}\dot{X} = \frac{\ddot{x}_1 m_1 + \ddot{x}_2 m_2}{M} = \frac{1}{M} \left(\frac{Gm_1 m_2}{d_1^2} (\vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{21}) \right) = 0$$

la *ley de conservación del momento lineal*.

Observación. $\dot{X}^1, \dot{X}^2, \dot{X}^3$ son integrales primeras del sistema, si asigno a \dot{X} un valor \dot{X}_0 esté permanece constante a lo largo del tiempo.

Observación. Si $\dot{X} = \dot{X}_0$, tomando una nueva referencia $\hat{x}_i = x_i - \dot{X}_0 t$ las ecuaciones se transforman en si mismas por el nuevo momento, $\hat{\dot{X}} = 0$. Puedo suponer $\dot{X} = 0$.

Observación. Una vez fijamos $\dot{X} = 0$, entonces $\vec{N}X = \dot{X} = 0$, luego X es una *nueva* constante del movimiento. X permite conocer x_2 en función de x_1 y \dot{X} permite conocer \dot{x}_2 en función de x_1 . Es suficiente trabajar con (x_1, \dot{x}_1)

Para escribir las ecuaciones del movimiento, supongamos que $X = 0$, o equivalentemente tomemos $\vec{r} = x_1 - X$, y $\vec{r}_2 = x_2 - X$, entonces de,

$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{M},$$

se deduce,

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}.$$

Como hemos visto, las constantes del movimiento nos permiten escribir algunas de las coordenadas en función de las otras. Ahora podemos escribir la ecuación diferencial únicamente en \vec{r} :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{Gm_2(\vec{r}_2 - \vec{r})}{(\|\vec{r}\| + \|\vec{r}_2\|)^3} = -\frac{Gm_2\left(\frac{m_1}{m_2}\vec{r} + \vec{r}\right)}{\left(\|\vec{r}\| + \frac{m_1}{m_2}\|\vec{r}\|\right)^3} \\ &= -\frac{Gm_2\left(\frac{m_2+m_1}{m_2}\right)\vec{r}}{\left(\frac{m_2+m_1}{m_2}\right)^3\|\vec{r}\|^3} = -\frac{Gm_2\vec{r}_1}{\left(\frac{m_2+m_1}{m_2}\right)^2\|\vec{r}\|^3} \\ &= -\frac{Gm_2^3 \cdot \vec{r}}{(m_2 + m_1)^2\|\vec{r}\|^3} \\ &= -\frac{Gm_2^3}{M^2} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{\|\vec{r}\|}. \end{aligned}$$

En adelante denotamos $K = \frac{Gm_2^3}{M^2}$, $r = \|\vec{r}\|$. La ecuación del movimiento es entonces,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{K1}$$

que podemos escribir como un campo vectorial en \mathbb{R}^6 , donde las coordenadas son las componentes de \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$,

$$\vec{N}_r = r^j \frac{\partial}{\partial r^j} - \frac{K}{r^2} \cdot \frac{r^j}{r} \frac{\partial}{\partial \dot{r}^j}.$$

Este campo es una **fuerza central**. Es decir, que en cada punto, \vec{r} es proporcional a \vec{r} . Esto proporciona otras nuevas tres constantes del movimiento, las componentes del **momento angular**.

$$\begin{aligned} W &= r \times \dot{r} = (W_1, W_2, W_3) \\ \frac{d}{dt}W &= \vec{N}_r W = \vec{r} \times \ddot{r} + \dot{r} \times \dot{r} = -\frac{K}{r^3} \vec{r} \times \vec{r} = 0. \end{aligned}$$

¿Cómo utilizar estas integrales primeras? En primer lugar, W es un vector perpendicular a \vec{r} y a \dot{r} . Dado que W es constante, deducimos que el movimiento queda confinado al plano perpendicular a M . Tomando un sistema de referencia, adecuado, podemos suponer:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (r_1, r_2, 0), \\ \dot{\vec{r}} &= (\dot{r}_1, \dot{r}_2, 0), \end{aligned}$$

y el momento angular queda reducido a una integral primera escalar, $W = r_1 \dot{r}_2 - r_2 \dot{r}_1$.

Para utilizar la simetría de la *fuerza central* es útil tomar coordenadas polares en el plano del movimiento,

$$\begin{aligned} r_1 &= r \cos \theta \\ r_2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Para obtener las ecuaciones del movimiento en este sistema, derivamos dos veces con respecto al campo vectorial,

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{r}_2 &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{r}_1 &= \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Es decir:

$$\vec{r} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

e igualando con (K1) producen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - \frac{K}{r^2} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{aligned}$$

Por otro lado $W = r_1\dot{r}_2 - r_2\dot{r}_1 = r^2\dot{\theta}$, y susbtituyendo, las ecuaciones anteriores se reducen,

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{W^2}{r^3} - \frac{K}{r^2} \\ \dot{\theta} &= \frac{W}{r^2} \end{aligned}$$

que un *sistema tridimensional desacoplado*, en el sentido de que la primera ecuación -que es de segundo orden - puede resolverse independientemente de la segunda.

La segunda ecuación, da automáticamente la **Segunda Ley de Kepler**, puesto que $r^2\dot{\theta}$ es la velocidad areolar barrida por cualquier curva en el plano. Recordamos, el area barrida en tiempo t por la curva $(r(t), \theta(t))$, es:

$$A(t) = \int_0^t r^2(t)\dot{\theta}(t)dt.$$

Para resolver la ecuacion en r , podemos considerarla como un sistema mecánico en un grado de libertad. Si integramos el segundo miembro de la ecuación, encontramos el potencial: $V(r) = \frac{M^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$ y la ley de conservación de la energía nos da automáticamente una nueva integral primera,

$$E(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + V(r),$$

para cada valor E prefijado de la energía despejamos \dot{r} ,

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2 \left(E + \frac{K}{r} - \frac{W^2}{2r^2} \right)}$$

Lo que nos da una relación diferencial entre r y θ :

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{W}{r^2 \sqrt{2 \left(E + \frac{K}{r} - \frac{W^2}{2r^2} \right)}}$$

ecuación puede integrarse mediante una cuadratura (y se hizo en 1637!), obteniéndose,

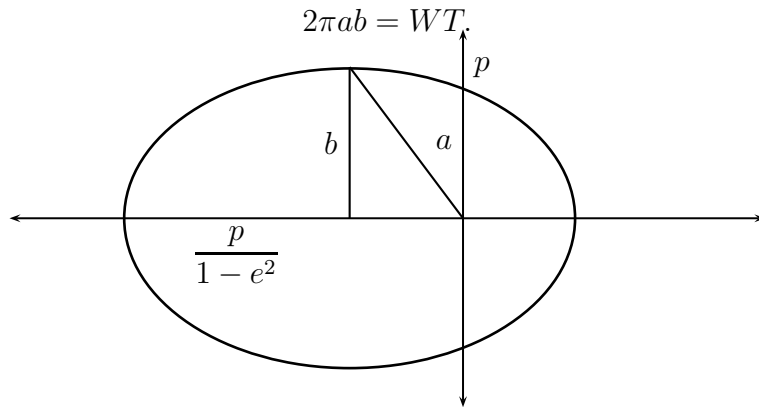
$$\cos \theta = \frac{W/r - K/W}{\sqrt{2E + K^2/W^2}},$$

Tomando $e = \sqrt{\frac{2EW^2}{K^2} + 1}$, y $p = W^2/K$, despejamos r ,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

que es la ecuación de una elipse de parámetro p y excentricidad e , quedando así probada la **Primera Ley de Kepler**.

Consideremos ahora una órbita elíptica, con semiejes mayor y menor a, b respectivamente. El area de la elipse es πab . Por otro lado T es el periodo de la órbita, dado que la velocidad areolar es constante, e igual a $W/2$, el area debe ser igual a $TW/2$. Por tanto:



Utilizando,

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}},$$

obtenemos

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K^2}{4\pi^2}$$

entonces el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor y queda comprobada la **Tercera Ley de Kepler**.

4.3. Teorema de Reducción Local

Sea \vec{X} un campo vectorial en $U \subset \mathbb{R}^n$. Veremos como, fuera de un *punto singular* siempre existen suficientes constantes del movimiento como para que \vec{X} pueda escribirse como el grupo de translaciones, en un sistema adecuado de coordenadas.

Teorema 17 (De Reducción Local). Sea \vec{X} un campo vectorial en $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $p \in U$ no singular, existe un entorno $p \in U_p$ y un sistema de coordenadas y_1, \dots, y_n en U_p tales que,

$$\vec{X}|_{U_p} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Por tanto y_2, \dots, y_n son constantes del movimiento.

Demostración.

Por el teorema de existencia local de solución, tenemos que existen, $\varepsilon > 0$, un entorno V_p , y una única solución ϕ ,

$$\phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_p \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Como p es no singular, si escribimos

$$\vec{X} = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

debe ser $\vec{f}_i(p) \neq 0$, para algún i . Supongamos, $f_1(p) \neq 0$. En otro caso renumeramos las variables.

Entonces sea W_p el hiperplano $\{x_1 = x_1(p)\} \cap V_p$, y sea $K = (-\varepsilon, \varepsilon) \times W_p$. En K , tenemos las variables coordenadas $t, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, que son respectivamente el parámetro en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, y la restricción de las coordenadas de \mathbb{R}^n a W_p .

Consideremos la reestricción,

$$\bar{\phi}: K \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Es una aplicación diferenciable entre espacios de dimensión n . Calculemos el jacobiano de $\bar{\phi}$ en el punto $(0, p)$.

$$\frac{\partial \phi_1, \dots, \phi_n}{\partial t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n}$$

Realicemos algunas observaciones sobre los coeficientes que intervienen en este determinante. En primer lugar, por la definición de solución,

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \right)_{(0,p)} = f_i(p)$$

En segundo lugar, los vectores $\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}$ son tangentes al hiperplano $t = 0$, y sobre este hiperplano,

$$\bar{\phi}_1(0, \bar{x}) = 0, \quad \bar{\phi}_i(0, \bar{x}) = x_i \quad i > 1,$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \bar{x}_i} \right)_{(0,p)} = \delta_{ij},$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial \bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_n}{\partial t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} \right)_{(0,p)} = \begin{vmatrix} f_1(p) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(p) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(p) & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = f_1(p).$$

Luego, por hipótesis, el jacobiano es distinto de cero. Aplicando el teorema de la función inversa, podemos encontrar un $\bar{K} \subset K$, entorno de $(0, p)$ de manera que, $\bar{\phi}$ es un difeomorfismo con su imagen, que llamamos U_p .

$$\bar{\phi}: \bar{K} \xrightarrow{\sim} U_p$$

Definimos entonces, las funciones:

$$y_1(q) = t(\bar{\phi}^{-1}q), \quad y_2(q) = \bar{x}_2(\bar{\phi}^{-1}q), \dots, \quad y_n(q) = \bar{x}_n(\bar{\phi}^{-1}q),$$

resultando,

$$\vec{X}y_1 = 1, \quad \vec{X}y_2 = 0, \dots, \quad \vec{X}y_n = 0,$$

□.

5. Objetos Invariantes

Sea X un campo vectorial en $U \subset \mathbb{R}^n$. Un cierto cerrado $C \subset U$, es un **objeto invariante** si para todo $p \in C$, se tiene $\mathcal{O}_p \subset C$. Se sigue, que las **órbitas** son objetos invariantes.

En general, si C está definido por un sistema de ecuaciones:

$$C = \{x: F_k(x) = 0\},$$

entonces C será un objeto invariante si y solo si, para todo k , $X F_k|_C = 0$. Sin embargo, no todo objeto invariante va a estar definido por un sistema de ecuaciones, como es el caso de los **atractores extraños**.

El caso más simple, es el de los **puntos fijos** de X . Es inmediato que p es un punto fijo de X si y solo si $X_p = 0$. Cerca de un punto fijo, no podemos aplicar el teorema de reducción a forma canónica. Por tanto, alrededor de los puntos fijos, es donde encontramos la **complejidad local** del flujo de un campo vectorial.

5.1. La ecuación en variaciones

Para estudiar el comportamiento de un sistema alrededor de un objeto invariante, como es por ejemplo, un punto fijo, resulta muy útil substituir el sistema original por otro más sencillo, pero que se comporte de forma similar al anterior, al menos en un rango cercano al objeto invariante.

Consideremos el campo,

$$X = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y supongamos que conocemos el flujo del campo

$$x(t, \lambda), \text{ normalizado a } x(0, \lambda) = \lambda,$$

donde t , representa el parámetro del grupo, y λ el parámetro de las condiciones iniciales.

Alrededor de una condición inicial, por ejemplo, $\lambda = 0$, podemos desarrollar el flujo en serie de potencias,

$$x_i = x_i^{(0)} + \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j} \lambda_j + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \lambda_i \lambda_j} \frac{\lambda_i \lambda_j}{2} + \dots = \sum_{\alpha} x_i^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!},$$

donde x_i^{α} representa la derivada parcial $\left(\frac{\partial^{|\alpha|} x_i}{\partial \lambda^{\alpha}}\right)_{\lambda=0}$. Derivando con respecto t , obtenemos,

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha} \dot{x}_i^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}.$$

ahora bien, el valor de \dot{x}_i viene dado precisamente por la ecuación diferencial original, y por tanto,

$$\sum_{\alpha} \dot{x}_i^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!} = f_i(x(t, \lambda)).$$

Basta entonces desarrollar el segundo término en serie de potencias en λ para obtener una familia de identidades. Para derivar $f(x(t, \lambda))$ con respecto a λ , hay que aplicar sucesivamente la regla de la cadena. Esto puede formalizarse del siguiente modo. Introducimos los operadores **derivada total**.

$$\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\lambda_i} = x_j^{\epsilon_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \dots = \sum_{\alpha, j} x_j^{\alpha + \epsilon_i} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

Entonces, la igualdad anterior, se reduce a,

$$\sum_{\alpha} \dot{x}_i^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!} = \sum_{\alpha} \left(\left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\lambda} \right)^{\alpha} f_i \right) \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}$$

es decir, para cada i , y cada α ,

$$\dot{x}_i^{\alpha} = \left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\lambda} \right)^{\alpha} f_i \tag{EV}$$

Un cómputo directo nos dice que $\left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}\lambda}\right)^{\alpha} f_i$ es un polinomio en las x_j^{β} con $|\beta| \leq |\alpha|$. Luego, para un orden finito l , las ecuaciones (EV) con $|\alpha| \leq l$, definen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes polinomios en las variables dependientes. La llamada *ecuación en variaciones de orden l asociada a X* . Es conocido, que estas ecuaciones polinómicas pueden linealizarse, pero no vamos a entrar en esta cuestión.

5.1.1. Variaciones a lo largo de una órbita

Consideremos $\gamma(t)$ una curva solución de \vec{X} . Entonces, la ecuación,

$$\dot{x}_i^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^\alpha f(\gamma(t, \lambda))$$

mide la aproximación de orden l del flujo cerca de la curva $\gamma(t)$. En concreto, para orden 1, se obtiene el sistema:

$$\dot{x}_i^{\epsilon_j} = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\gamma(t)) x_k^{\epsilon_j}$$

Si llamamos U a la matriz $(x_i^{\epsilon_j})$, y $A(t)$ a la matriz de coeficientes $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$, entonces el sistema anterior se escribe,

$$\dot{U} = A(t).U,$$

que puede resolverse de forma independiente para cada columna de la matriz U , quedando n funciones incógnitas,

$$\dot{Y} = A(t).Y \tag{EVT}$$

que es un **sistema de ecuaciones diferenciales lineales** con coeficientes, funciones de t . En el caso de un punto fijo, los coeficientes que obtenemos, son **constantes**.

Ejemplo. Consideremos la ecuación del péndulo,

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\text{sen}(x).$$

Este sistema tiene dos puntos fijos en el plano $R_{x,p}^2$, el punto $(0, 0)$ que corresponde al estado de equilibrio del péndulo colgando bajo su punto de suspensión, y el punto $(\pi, 0)$ que corresponde al equilibrio del péndulo situado sobre su punto de suspensión.

La ecuación en variaciones en el punto $(0, 0)$ debe ser

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial p}{\partial p}(0, 0) \\ \frac{\partial -\text{sen}(x)}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial -\text{sen}(x)}{\partial p}(0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

que es un centro lineal.

Ejercicio. *Calcule la ecuación en variaciones de la ecuación del péndulo en el punto fijo $(\pi, 0)$. ¿Qué tipo de sistema lineal se obtiene?*

En el caso de una órbita distinta de un punto fijo, los coeficientes son variables. Pero conocemos una solución del sistema, que viene dada por el propio campo vectorial:

$$Y = \begin{pmatrix} f_1(\gamma(t)) \\ \vdots \\ f_n(\gamma(t)) \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de reducción de D’Alambert (que consiste en considerar una nueva base, que incluya a la solución conocida), se reduce a un sistema con $n - 1$ incógnitas,

$$\dot{Z} = B.Z, \tag{EVN}$$

la **ecuación en variaciones normales**.

Observación. Aunque aquí no se discuten las técnicas necesarias, es interesante comentar que la (EVT) mide la evolución de un vector tangente que se desplaza a lo largo de la órbita siguiendo el flujo del campo. Puede escribirse en términos de la derivada de Lie,

$$\dot{Y}|_{\gamma} = L_X Y|_{\gamma}.$$

En la (EVN), al eliminar la solución conocida, estamos midiendo únicamente la evolución en la parte transversal a la curva, es decir, en el espacio tangente al ambiente cociente por el campo vectorial X .

5.2. Sobre la estabilidad de puntos fijos

Una pregunta fundamental es la estabilidad de los puntos fijos de un sistema dinámico. Dada una condición inicial cercana a un punto fijo... ¿Es de esperar que continúe evolucionando cerca del punto fijo para todo valor de t ?

Definición 19. Un punto fijo p de l grupo $\{\sigma_t\}$ se dice **estable en el sentido de Liapjunov** si para todo entorno U de p , existe otro entorno V de p , tal que para todo tiempo t , $\sigma_t(V) \subset U$.

5.2.1. Estabilidad de los sistemas lineales

Consideremos un sistema lineal, a coeficientes constantes, $\dot{Y} = AY$. Entonces, las soluciones vienen dadas por la exponencial:

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 \quad (\text{SL})$$

donde

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Teorema 18. El sistema (SL) es estable en sentido de Liapjunov si y solo si los valores propios de A tienen todos partes reales no positivas.

5.2.2. Estabilidad en el caso hiperbólico

Definición 20. Un punto fijo se dice, hiperbólico, elíptico o parabólico, se según lo sea su sistema linealizado EVT.

Teorema 19 (Hartman). Sea p un punto hiperbólico de X , y A su ecuación en variaciones. Entonces hay un heomeomorfismo

$$T: U_p \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n, p \mapsto 0,$$

tal que, para t pequeño,

$$\sigma_t(q) = T^{-1}(e^{tA}T(q))$$

Por tanto, un punto **hiperbólico** es estable si y solo si lo es el sistema linealizado correspondiente.

Ejercicio. *Determine la estabilidad del punto de equilibrio $(0, \pi)$ en la ecuación del péndulo:*

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\text{sen}(x).$$

5.2.3. Funcion de Liapunov

Consideremos X un campo vectorial, y F una función constante. Sea U un abierto en el cual $XF \geq 0$. Decimos en tal caso que F es una función de Liapunov para X en U .

Si F es una función de Liapunov, entonces para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $K_c = \{p: F(p) \leq c\}$, **estable** para el flujo de X , en el sentido de que, para todo $p \in K_c$ y todo $t \geq 0$, se tiene $\sigma_t(p) \in K_c$.

Teorema 20. Si F es una función de Liapunov para X , y F tiene un máximo local en p , entonces p es un punto fijo estable en el sentido de Liapunov.

Bibliografía Recomendada

- [1] ARNOLD, V.I. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ed. Rubiños, Madrid 1995.
- [2] GUCKENHEIMER & HOLMES *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, 1990
- [3] HUBBARD, J. H. & WEST, B. H. *Ordinary Differential Equations, a Dynamical Systems Approach. Part II: Higher Dimensional Systems*. Springer Verlag, 1995.