Resolución de Problemas sobre el Plano Reticular

José Luis Ramírez Ramírez
Grupo YAGLOM
Escuela de Matemáticas
Universidad Sergio Arboleda
josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co

Resumen

El objetivo de este cursillo es introducir una serie de problemas relacionados con el plano reticular, con el fin de consolidar una nueva teoría de "Matemática elemental", la cual pueda ser estudiada con los niños y niñas del proyecto de Talentos en Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda.

1. Introducción

El proyecto de Talentos en Matemáticas nació hace 10 años, bajo la dirección del profesor Jesús Hernando Pérez "Pelusa" por la necesidad de crear un espacio para que los niños y niñas con talento para las matemáticas, pudieran desarrollar, enfocar y fortalecer sus habilidades.

Desde ese entonces, el proyecto ha atendido a más de 1200 estudiantes de los colegios públicos y privados, bajo la modalidad del estudio de teorías de "Matemática Elemental", en un ambiente universitario. Actualmente el proyecto desarrolla sus investigaciones en el marco del Grupo YAGLOM.

La palabra "elemental" es la que guía todo el trabajo de nuestro grupo y por ello este se llama **Grupo Yaglom**. Isaac Yaglom fue uno de los grandes animadores del programa Olimpiadas Matemáticas que en la actualidad tiene ya una cobertura mundial. En un congreso celebrado en homenaje a otro de los grandes de la matemática elemental Yaglom presentó un trabajo cuyo título es bien atractivo: "*La Geometría Elemental Hoy*"; en este artículo Yaglom ofrece la siguiente propuesta de definición:

"*Matemática elemental es aquella que se construye trabajando con estudiantes y profesores de las escuelas y colegios*".

Esta se caracteriza por los siguientes aspectos, [11] y [12]:

- En el trabajo elemental hay construcción de conocimiento matemático, bien sea conocimiento ya conocido o completamente inédito. La matemática elemental, como toda disciplina académica, se construye en equipo.
- En los equipos de matemática elemental suelen participar por lo menos, dos tipos de personas, en primer lugar, estudiantes de las escuelas o colegios o personas sin formación matemática de nivel universitario; y matemáticos profesionales en ejercicio. Conviene también que participen algunos de los profesores de los estudiantes del equipo.
- Como ya se ha mencionado, el propósito fundamental de nuestro grupo es lograr que los estudiantes o las personas sin formación en matemáticas de nivel universitario desarrollen su creatividad matemática con las actividades que se les proponen. El equipo Yaglom se reúne una vez a la semana para organizar teorías "elementales" y uno o varios de sus miembros trabajan, con estas teorías o con parte de ellas, en sesiones de cinco horas semanales con grupos de niños de edades similares, procurando que ellos o algunos de ellos encuentren regularidades, formulen conjeturas, propongan ejemplos y contraejemplos, formulen argumentos, etc.

A continuación mostramos unos primeros bosquejos por desarrollar una "nueva" teoría de matemática elemental.

2. El Plano Reticular

Definición 2.1. *Un punto P de coordenadas (x, y) se llama* reticular *si x, y son números enteros, es decir, si $x, y \in \mathbb{Z}$. Lo notaremos como $P(x, y)$ o simplemente P o (x, y).*

Definición 2.2. *Un* plano reticular *es el conjunto de puntos del plano cartesiano que son reticulares.*

Ejemplo 2.3. *Los puntos A, B, C, D, E, F y O de la figura 1 son puntos reticulares. El punto $(0, 0)$ se denotará con la letra O.*

Definición 2.4. *Sea $P(x, y)$ un punto reticular, entonces el* grado de P*, denotado por $\partial(P)$, es la cantidad de puntos reticulares que se encuentran en el segmento con extremos en O y P, sin contar el origen. Además, se define $\partial(O) = 0$.*

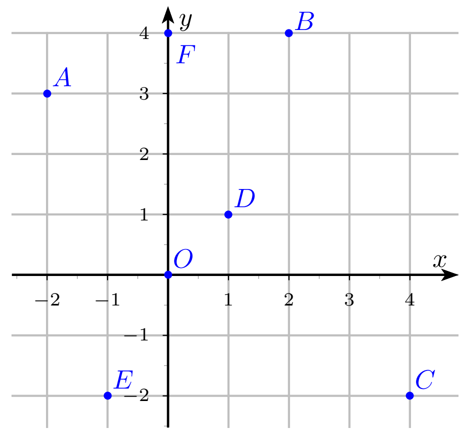


Figura 1: Puntos reticulares, Ejemplo 2.3.

Ejemplo 2.5. *Los puntos del ejemplo 2.3 tienen los siguientes grados: $\partial(A) = 1, \partial(B) = 2, \partial(C) = 2, \partial(D) = 1, \partial(E) = 1, \partial(F) = 4$ y $\partial(O) = 0$.*

Definición 2.6. *Un punto reticular P es un* punto visible*, si en el segmento con extremos en O y P no existen puntos enteros, salvo los extremos. De lo contrario se dice que el punto P es un* punto oculto*. Por definición O es visible.*

Ejemplo 2.7. *Los puntos A, D, E y O del ejemplo 2.3 son visibles y los puntos B, C y F son ocultos.*

Sesión de Problemas 1

1. Calcule el grado de los siguientes puntos. ¿Cuáles son visibles y cuáles ocultos?.

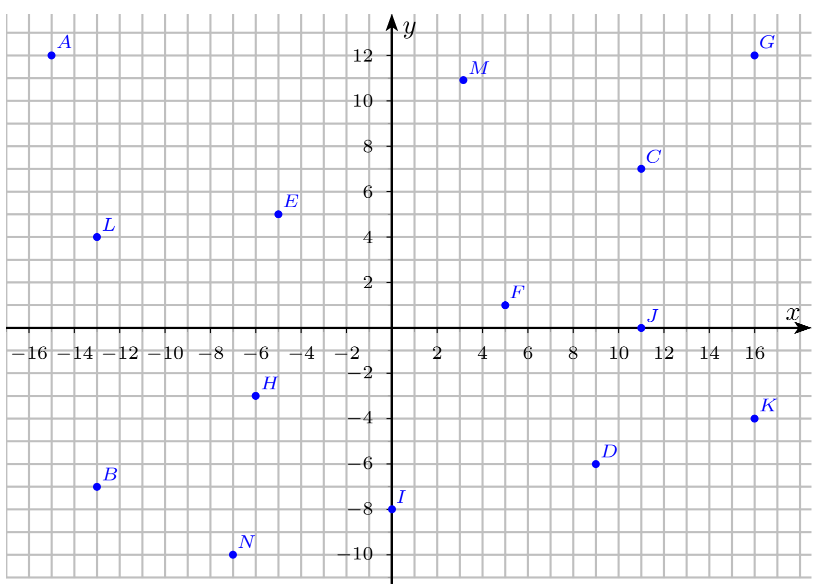


Figura 2: Plano Reticular, Ejercicio 1.

2. Si un punto es visible, ¿qué se puede decir acerca de su grado?. Análogamente, si un punto es oculto, ¿qué se puede decir acerca de su grado?. ____

3. Complete la siguiente tabla con la información pedida.

Punto	$\partial(P)$	Coordenada x	Coordenada y
A			
B			
C			
D			
E			
F			
G			
H			
I			
J			
K			
L			
M			

Cuadro 1: Tabla, Ejercicio 3.

Si $P(x, y)$ un punto reticular tal que $\partial(P) = n$, ¿qué relación hay entre n y x, n y y?. Si el punto $P(x, y)$ es visible ¿qué relación hay entre x y y?. Existe otra relación ¿cuál?.

4. Definimos la *potencia n de un punto reticular* $P(x, y)$ como $P^n(x^n, y^n)$. Considere el punto reticular $P(2, 3)$. Calcule el grado de P, P^2, P^3 y P^{100}. ¿Qué puede decir acerca del grado de P^n?.

5. Si P es un punto oculto, ¿qué puede concluir de $\partial(P^n)$?. Escriba una conjetura.

6. Si el punto P es visible, ¿la conjetura del ejercicio anterior sigue siendo valida?.

7. ¿Qué relación hay entre $\partial(P(x, y))$ y el máximo común denominador de x y y?.

8. Utilice el anterior ejercicio para calcular el máximo común denominador de los números 12 y 8. Escriba en general un algoritmo para calcular el máximo común divisor con el anterior método.

3. Puntos Reticulares de Fibonacci

Los números de Fibonacci, descubiertos por Leonardo Fibonacci (1170-1240) se definen por la siguientes condiciones:

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ y}, \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

Por ejemplo $F_3 = F_2 + F_1 = 2$.

Un punto P es *Reticular de Fibonacci* si $P(F_n, F_m)$ donde F_n y F_m son el n-ésimo número de Fibonacci y m-ésimo numero de Fibonacci respectivamente.

Sesión de Problemas 2

1. Calcular los números de Fibonacci F_4, F_5, F_6 y F_7.
2. ¿Cuáles de los puntos de la figura 3 son puntos reticulares de Fibonacci?.

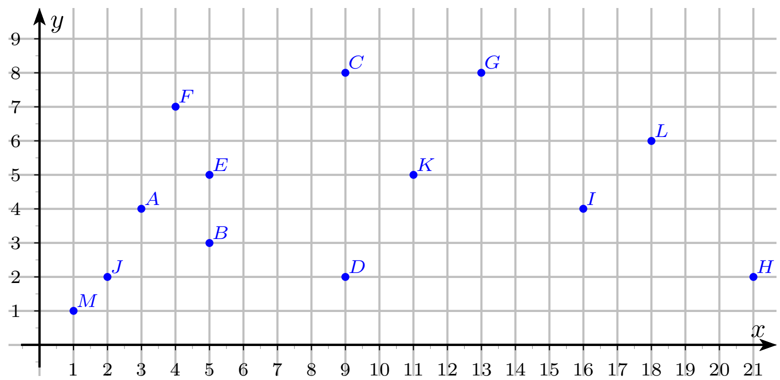


Figura 3: Plano reticular (Números de Fibonacci.)

3. Grafique los puntos $P(F_1, F_2)$, $P(F_2, F_3)$, $P(F_3, F_4)$ y $P(F_4, F_5)$ y calcule sus grados. En general ¿qué puede concluir sobre el grado de $P(F_n, F_{n+1})$?. Escriba una conjetura.

4. ¿Qué relación hay entre el grado de un punto Q de coordenadas (n, m) y el grado del punto de Fibonacci $P(F_n, F_m)$?.

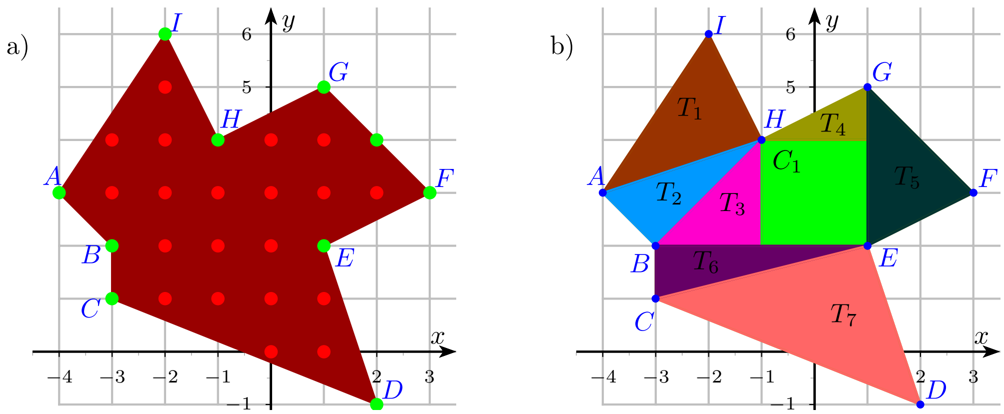
4. Área de Polígonos Reticulares

Se denotará por I y B el número de puntos reticulares que están en el interior del polígono y en la frontera del retículo, respectivamente.

Ejemplo 4.1. *El polígono reticular del cuadro 2-a) tiene 20 puntos reticulares en el interior y 10 puntos reticulares en la frontera, es decir $I = 20$ y $B = 2$.*
Además, el área es 24, una forma de calcular su área es descomponiendo el polígono en figuras más sencillas, como por ejemplo se muestra en el cuadro 2 -b). Entonces

$$\mathcal{A}(T_1) = 3{,}5, \ \mathcal{A}(T_2) = 2, \ \mathcal{A}(T_3) = 2, \ \mathcal{A}(C_1) = 4,$$
$$\mathcal{A}(T_4) = 1, \mathcal{A}(T_5) = 3, \ \mathcal{A}(T_6) = 2, \ \mathcal{A}(T_7) = 6{,}5.$$

así el área es 24.



Cuadro 2: Área Polígono reticular $ABCDEFGHI$.

Sesión de Problemas 3

1. Para cada uno de los polígonos reticulares del cuadro 3, encuentre I, B y su área.
2. ¿Qué relación hay entre el área del polígono y los valores I y B?. Escriba una conjetura.

3. A continuación se ilustra lo que es y también lo que no es un *Triángulo Primitivo*.

   a) Observe las figuras y escriba las características esenciales de un triángulo primitivo.

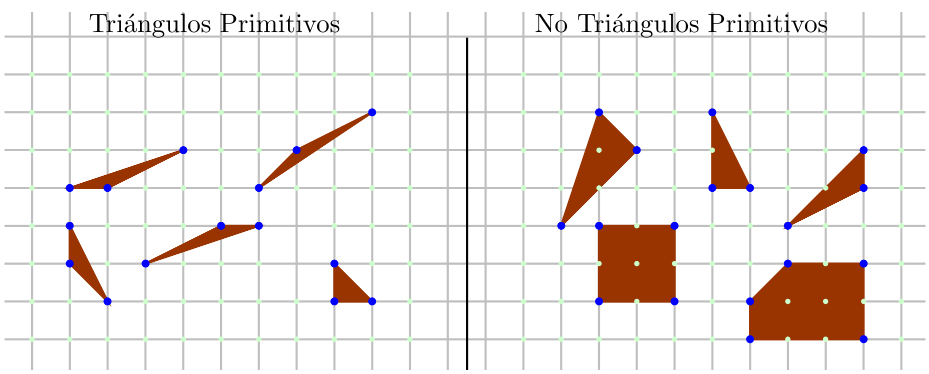
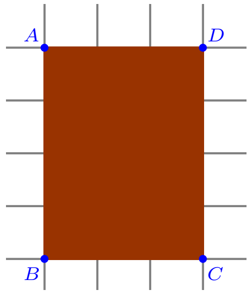
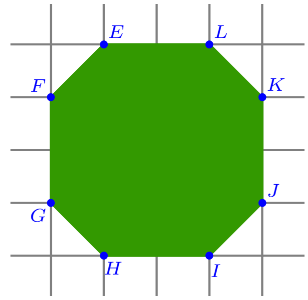
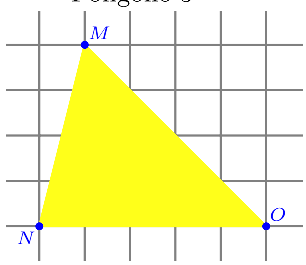
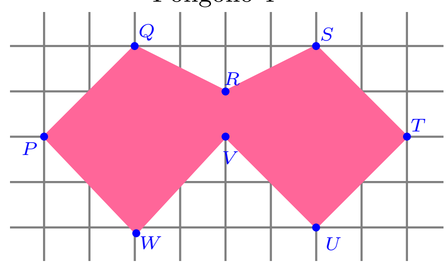
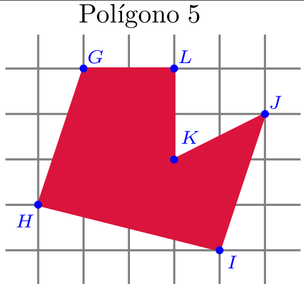
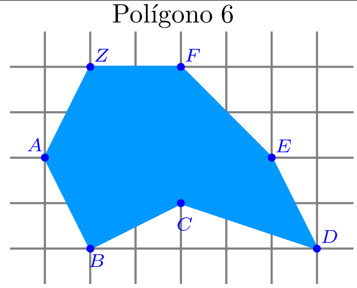


Figura 4: Triángulos Primitivos y No Primitivos.

   b) Pídale a una persona que dibuje un Triángulo Primitivo a partir de las características del punto anterior. Compare la figura resultante con la descripción dada y transforme sus características si es necesario para asegurar que la representación sea la figura definida.

Polígono 1  $I =$ $B =$ Área=	Polígono 2  $I =$ $B =$ Área=
Polígono 3  $I =$ $B =$ Área=	Polígono 4  $I =$ $B =$ Área=
Polígono 5  $I =$ $B =$ Área=	Polígono 6  $I =$ $B =$ Área=

Cuadro 3: Área polígonos reticulares, Ejercicio 1.

4. Encuentre el área de cada uno de los Triángulos Primitivos de la figura del ejercicio 3. Escriba una conjetura.

___

___

___

5. ¿Es posible construir un polígono reticular de área 1/2 que no sea un triángulo?. Justifique su respuesta.

___

___

___

6. Un polígono se puede triangularizar si se puede dividir en triángulos por medio de diagonales que no se cortan, que son interiores al polígono y cuyos extremos son vértices del polígono. El polígono $ABCDEFGHI$ de la figura 5 está triangularizado en 7 triángulos.

   Triangularice los polígonos de la figura 6 en triángulos primitivos. ¿Es única esta triangularización?. ______________________

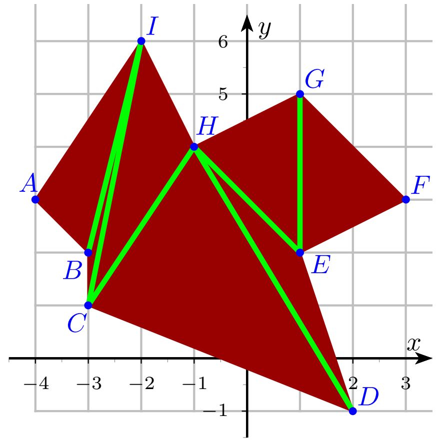


Figura 5: Una triangularización del polígono $ABCDEFGHI$.

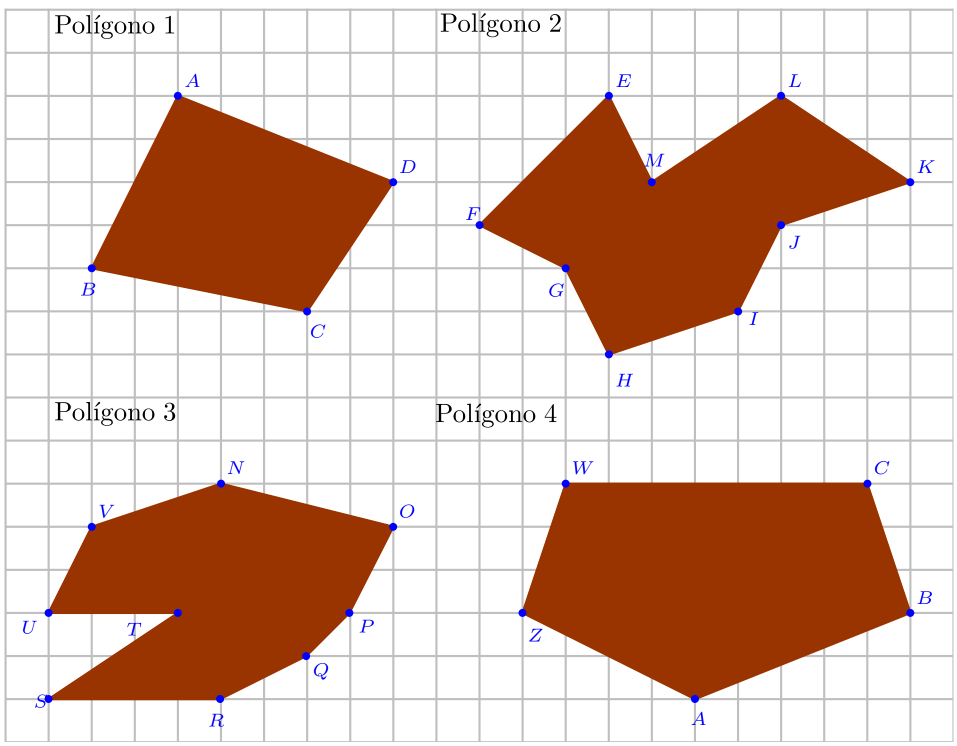


Figura 6: Polígonos para triangularizar

7. Dado un polígono reticular, denotaremos por I y B al número de puntos reticulares que están en el interior del polígono y en la frontera del retículo, respectivamente. Complete la siguiente tabla con la información que se pide.

   ¿Qué relación hay entre el Número de Triángulos Primitivos y los valores I y B? Escriba una conjetura. Si es necesario realice más ejemplos.

   ____

   ____

   ____

   ____

Polígono (Ejercicio 1).	Número de Triángulos Primitivos.	I	B
Polígono 1			
Polígono 2			
Polígono 3			
Polígono 4			
Polígono 5			

8. Utilizando las propiedades de los triángulos primitivos justifique la conjetura del ejercicio 2.

5. Algunas Aplicaciones

En la sección anterior se estudio una propiedad muy interesante acerca del área de los polígonos reticulares, conocido como el Teorema de Pick, esta afirma lo siguiente:

Teorema 5.1 (Teorema de Pick)**.** *El área de todo polígono reticular es*

$$\mathcal{P} = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde I es el número de puntos reticulares interiores y B es el número de puntos reticulares sobre la frontera del polígono.

En los siguientes ejercicios se estudiaran algunas aplicaciones del Teorema de Pick en la geometría.

Sesión de Problemas 4

1. En el plano reticular de la figura 7 construya un polígono regular reticular. ¿Cuántos polígonos regulares reticulares diferentes puede construir? Escriba una conjetura.

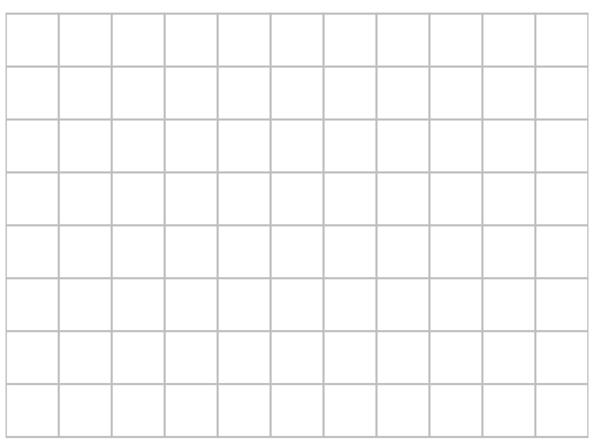


Figura 7: Plano Reticular, Ejercicio 1

2. A partir del ejercicio anterior ¿es posible construir un triángulo equilátero reticular?. Justifique su respuesta (Sugerencia: Calcule el área del triángulo equilátero de dos formas diferentes).

3. ¿Qué pasa si el polígono regular tiene cinco o más lados?, ¿Es posible construirlo?. Escriba una conjetura.

4. Utilice el Teorema de Pick y el siguiente teorema para justificar la conjetura del punto anterior:

   Teorema 5.2. $\tan(\pi/n)$ *con* $n \geq 3$ *es racional si y sólo si* $n = 4$. [1]

6. Teorema de Pick con Agujeros

En este apartado se generalizará el Teorema de Pick para polígononos con agujeros en el interior.

Definición 6.1. *Sea R un polígono reticular,* un agujero *de R es un polígono contenido en R, sin puntos de frontera en común.*

Ejemplo 6.2. *El polígono de la figura 8 tiene 3 agujeros.*

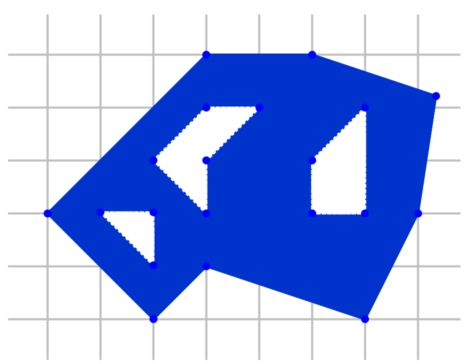
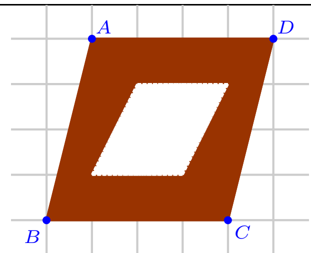
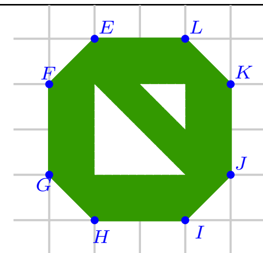
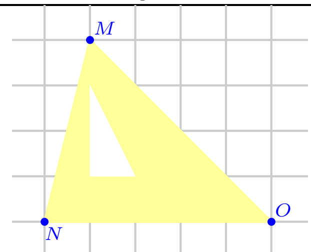
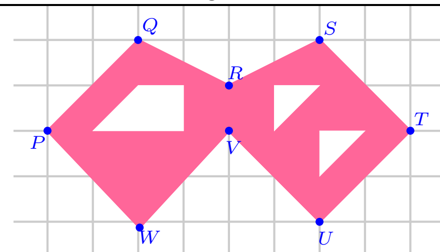
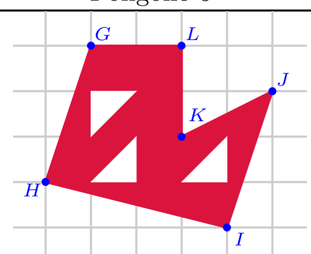
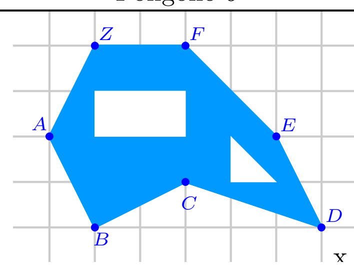


Figura 8: Polígono Reticular con Agujeros

Ejercicios

1. Para cada uno de los polígonos reticulares con agujeros del cuadro 4, encuentre I, B, n, (n es el número de agujeros) y su área.

[1] Para su demostración ver [10].

Polígono 1	Polígono 2
	
$I =$ $B =$ Área= $n =$	$I =$ $B =$ Área= $n =$
Polígono 3	Polígono 4
	
$I =$ $B =$ Área= $n =$	$I =$ $B =$ Área= $n =$
Polígono 5	Polígono 6
	
$I =$ $B =$ Área= $n =$	$I =$ $B =$ Área= $n =$

Cuadro 4: Área Polígonos con Agujeros, Ejercicio 1.

2. ¿Qué relación hay entre el área del polígono y los valores I, B y n?. Escriba una conjetura.

____

____

____

3. Justifique la anterior conjetura utilizando inducción matemática.

____

____

____

7. Puntos Interiores de una Circunferencia

En esta sección vamos a estudiar el número de puntos reticulares sobre una circunferencia, con centro en el origen y radio r, $(x^2 + y^2 = r^2)$. A dicho número lo vamos a denotar por $\mathcal{C}(r^2)$.

Sesión de Problemas 5

1. Complete la siguiente tabla a partir de la figura 9.

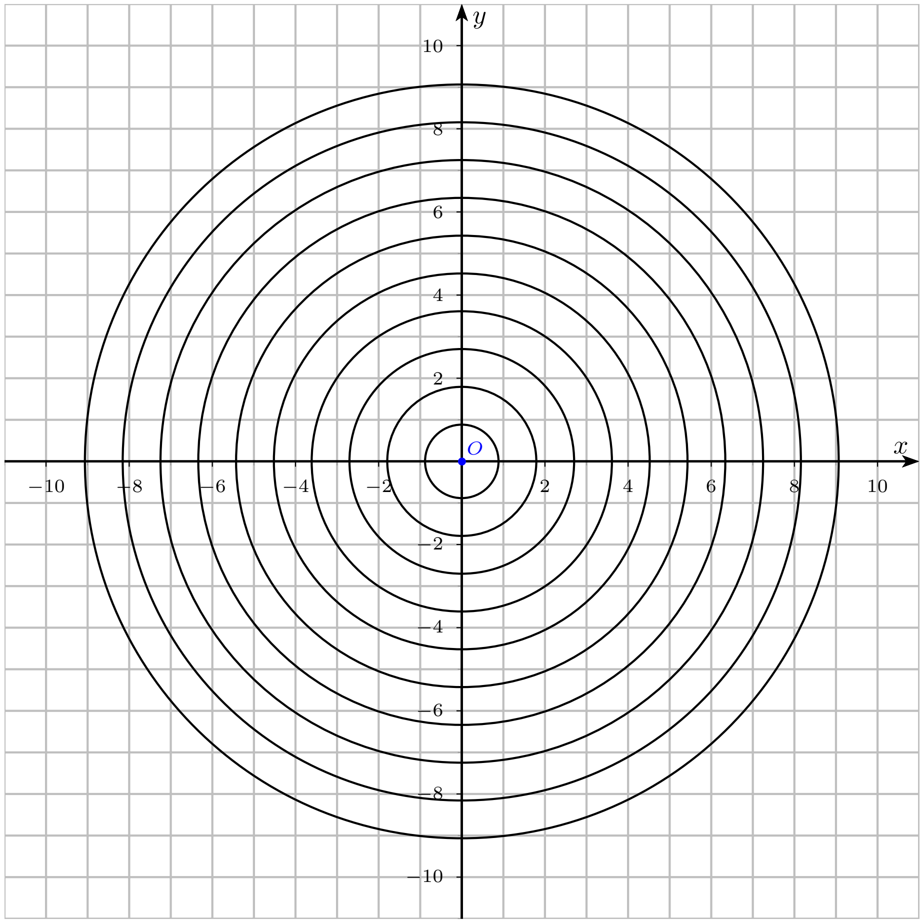


Figura 9: Puntos Reticulares en una Circunferencia, Ejercicio 1

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{C}(r^2)$										

2. ¿Cuál es la cantidad más pequeña de puntos reticulares que se pueden tener en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$? Justificar la respuesta.

____

____

3. Todo entero positivo n se puede descomponer como producto de factores primos de la siguiente forma

$$n = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_l^{b_l} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \cdots q_s^{c_s} \qquad (a \geq 0, b_i, c_j \geq 1)$$

donde los p_i son primos de la forma $4k+1$ para algún entero $k \geq 1$ y los q_j son primos de la forma $4n+3$ para algún entero $n \geq 0$.

Por ejemplo: $872100 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19$ donde $3 = 4 \cdot 0 + 3, 5 = 4 \cdot 1 + 1, 17 = 4 \cdot 4 + 1$ y $19 = 4 \cdot 4 + 3$.

Factorice los número 1170 y 3381 como en el ejemplo anterior y exprese cada primo ya sea de la forma $4k+1$ o $4k+3$.

____

____

____

4. Factorice los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, como en el ejercicio anterior. ¿Encuentras alguna relación con el ejercicio 1?.

5. Sea r el radio de una circunferencia centrada en el origen, tal que

$$r = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_l^{b_l} q_1^{c_1} q_2^{c_2} \cdots q_s^{c_s}$$

¿Qué se puede decir acerca de $\mathcal{C}(r^2)$?.

Bibliografía

[1] Bruckheimer, M. Arcavi, A. *A Visual Approach to Some Elementary Number Theory*, The Mathematical Gazette, Vol. 79, No. 486, pp. 471-478, 1995.

[2] Connor, J. Robertson, E. *The MacTutor History of Mathematics archive* Aparece en: http: www.gap-system.org/ history/Biographies/Pick.html.

[3] Davis, T. *Pick's Theorem*, Math-Circle, 2003. Aparece en http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf.

[4] Elduque, A. *El Teorema de Pick*, Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2007. Aparece en : http: www.unizar.es/matematicas/algebra/elduqe.

[5] Funkenbusch, W. *From Euler's Formula to Pick's Formula Usign and Edge Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 6, pp. 647-648, 1974.

[6] Gaskell, R.W., Klamkin, M.S., Watson, P. *Triangulations and Pick's Theorem*, Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 1, pp. 35-37, 1976.

[7] Jara, P. Ruiz, C. *El Teorema de Pick*, ESTALMAT- Andalucia, Granada. 2008. Aparace en: http: www.ugr.es/local/anillos/textos/pick.htm.

[8] Kolodziejczyka, K. Reayb, J. *Polynomials and spatial Pick-type theorems*, Expositiones Mathematicae, Vol. 26, No.1, pp 41-53, 2008.

[9] Niven, I. Zuzckerman, H.S. *Lattice Points and Polygonal Area*, The American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 10, pp. 1195-1200, 1967.

[10] O'Loughlin, D. *The Scarcity of Regular Polygons on the Integer Lattice*, Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 1, pp. 47-51, 2002.

[11] Pérez, J, et al. Cuatro Propuestas Didácticas en Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, 2005.

[12] Pérez, J, et al. La Matemática Elemental, por el grupo Yaglom, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, 2010.

[13] Ramírez, J. *El Teorema de Pick y Redes de Puntos*. MATerials MATematics, Publicació Electronica de Divulgacio del Departament de Matematiques de la Universitat Autonoma de Barcelona. Vol. 2010, No. 5, 41 pp.